

ENCYCLOPÉDIE

POPULAIRE,

OU

LES SCIENCES, LES ARTS

ET LES MÉTIERS

MIS À LA PORTÉE DE TOUTES LES CLASSES.

L'instruction mène à la fortune
et conduit au bonheur.

*Les contrefacteurs seront poursuivis
selon toute la rigueur de la loi.*

Extrait du Code pénal.

Art. 425. Toute édition d'écrits, de composition musicale, de dessin, de peinture ou de toute autre production, imprimée ou gravée **EN ENTIER OU EN PARTIE**, au mépris des lois et réglemens relatifs à la propriété des auteurs, est une contrefaçon, et toute contrefaçon est un délit.

Art. 427. La peine contre le contrefacteur, ou contre l'introducteur, sera une amende de cent francs au moins et de deux mille francs au plus, et contre le débitant, une amende de vingt-cinq francs au moins et de cinq cents francs au plus.

La confiscation de l'édition contrefaite sera prononcée tant contre le contrefacteur que contre l'introducteur et le débitant.

Les planches, moules et matrices des objets contrefaits seront aussi confisqués.

696109

(1)

TRAITÉ DE MÉCANIQUE

PRATIQUE.

TROISIÈME PARTIE.

DES

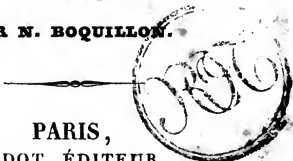
FROTTEMENTS

ET DE

LA RIGIDITÉ DES CORDAGES.

TRADUIT DE L'ANGLAIS

PAR N. BOQUILLON.



PARIS,

AUDOT, ÉDITEUR,

RUE DES MAÇONS-SORBONNE, N° 11.

1828.

10103



IMPRIMERIE DE A. HENRY,
RUE GIT-LE-COEUR, N° 8.

TRAITÉ DE MÉCANIQUE.

TROISIÈME PARTIE.

DES FROTTEMENS ET DE LA RIGIDITÉ
DES CORDAGES.



CHAPITRE PREMIER.

DES FORCES PASSIVES OU RÉSISTANTES
EN GÉNÉRAL.

(1) Tout ce qui est capable de mettre en mouvement un corps en repos, ou d'augmenter, ou de diminuer la quantité de mouvement dont un corps est animé,

ou bien enfin de détruire le mouvement que possède un corps, et de réduire celui-ci à l'état de repos, prend le nom de *force*.

Il existe deux espèces de forces, distinguées l'une de l'autre par les effets qu'elles sont capables de produire.

Les forces de la première espèce sont celles qui peuvent communiquer le mouvement à un corps en repos; ces forces sont incontestablement susceptibles de produire, suivant les circonstances, tous les autres effets énumérés dans la définition que nous venons de donner de la force en général. —

Il est donc entièrement évident que, si la même force qui communiquerait du mouvement à un corps en repos, était appliquée, dans une direction convenable, à un corps en mouvement, elle augmenterait la quantité de mouvement de ce corps, et la diminuerait si elle y était appliquée dans une direction contraire.

Il est également évident que, si une telle force, d'abord appliquée à un corps en repos, le met en mouvement dans une certaine direction, elle détruira le mouvement qu'elle aura communiqué, si on l'applique ensuite dans une direc-

tion opposée, et par conséquent forcera le corps à reprendre l'état de repos.

Cette espèce de force peut prendre le nom de *force active*, et toutes les forces, dont nous avons examiné les propriétés dans notre premier Traité sur les forces motrices, appartiennent à cette catégorie.

Les forces de la seconde espèce sont celles qui sont capables de diminuer la quantité de mouvement que possède un corps, ou de la détruire entièrement et de réduire le corps à l'état de repos, mais qui, d'un autre côté, ne peuvent, en aucune manière, produire le mouvement dans un corps en repos, ou accroître le mouvement qui pourrait être imprimé à un corps.

Ces forces prennent le nom de *forces passives* ou de *forces résistantes*.

On rencontre, à chaque instant, de nombreux exemples de pareilles forces; et l'on peut dire, avec certitude, qu'aucun mouvement n'est produit à la surface de la terre, sans que se manifestent les effets des *forces résistantes*.

La résistance que les fluides élastiques ou non élastiques opposent aux corps qui les traversent, offre peut-être

l'exemple le plus frappant des effets de ces forces.

La résistance que l'air oppose au passage d'un projectile, celle de l'eau, lorsqu'un corps solide la traverse, sont pour nous des exemples familiers de ces effets.

Cependant, comme la résistance des fluides appartient spécialement à une autre branche de la science, nous nous bornerons, dans ce *Traité*, à examiner les forces passives ou résistantes qui résultent des *frottemens* et de la *raideur* ou *rigidité des cordages*.

(2) La moindre réflexion suffit pour reconnaître combien il importe de pouvoir apprécier les effets de ces résistances dans la science des machines.

Dans notre premier *Traité*, nous avons expliqué la nature et les lois des forces actives, ou de ces agens mécaniques qu'on emploie ordinairement pour donner le mouvement aux machines.

Dans notre second *Traité*, nous avons expliqué la nature, la construction et les propriétés des machines destinées à recevoir le mouvement des forces actives que nous avons fait connaître dans le premier.

Mais, alors, pour écarter de nos recher-

ches tout ce qui aurait pu les compliquer, et les présenter au lecteur sous la forme la plus simple et la plus intelligible, nous avons considéré les machines destinées à transmettre la force active au point où s'opère le travail, comme n'éprouvant absolument aucune résistance; nous avons supposé que les surfaces qui se meuvent en contact étaient parfaitement polies, et n'éprouvaient aucun frottement; que les axes et les pivots n'étaient que des lignes et des points mathématiques; que les cordes étaient parfaitement flexibles; qu'en un mot, l'effet de la force motrice n'était diminué par aucune résistance, dans sa transmission, par la machine, au point où s'opère le travail.

Aucune de ces suppositions, néanmoins, ne se réalise dans l'application pratique, et dans l'emploi des machines. Les diverses surfaces qui se meuvent en contact, ne sont jamais parfaitement polies; les axes ont une épaisseur sensible, et les trous dans lesquels ils se meuvent, n'ont jamais non plus un poli parfait; les cordes, loin d'être parfaitement flexibles, ont une raideur ou une rigidité considérables, et cette rigidité

est ordinairement en raison même de la force des cordes.

L'art peut parvenir et parvient en effet à diminuer les effets de ces résistances. On peut donner aux surfaces un très-grand poli; on peut même employer encore d'autres moyens additionnels d'augmenter la facilité avec laquelle elles peuvent glisser les unes sur les autres; mais, malgré tous les efforts imaginables, ces surfaces restent hérissées de petites aspérités qui, se trouvant constamment en opposition pendant le mouvement des surfaces les unes sur les autres, mettent obstacle à ce mouvement, opposent une résistance considérable à l'action de la force motrice, et, enlevant à cette force une grande partie de son efficacité, la transmettent proportionnellement affaiblie au point où s'opère le travail.

Il est donc évident que, si nous voulons estimer l'efficacité réelle ou pratique d'une machine, nous devons posséder les moyens de calculer les effets de ces résistances. Lorsque nous avons obtenu ces résultats, nous devons alors les soustraire des effets indiqués par les principes théoriques, établis dans notre

second Traité, où nous n'avons pas pris en considération les effets des forces passives. Le surplus, ou le reste de cette soustraction représente alors la quantité de force active, ou l'effet de la force motrice, qu'on puisse réellement obtenir dans l'application pratique d'une force à une machine.

(3) Les forces passives ou résistantes produisent des effets différens en *Statique* et en *Dynamique*, c'est-à-dire dans les machines considérées comme en état d'équilibre, et dans les machines considérées comme en état de mouvement.

Si la machine est dans un état d'équilibre, on dit, des forces passives, qu'elles *aident la puissance*. Cela signifie que dans une machine réelle où ces résistances existent, il faut une moindre puissance pour faire équilibre à un poids donné, qu'il ne serait nécessaire si ces résistances n'avaient pas lieu.

Supposons, par exemple, qu'un poids de deux livres soit placé sur un plan incliné, dont la longueur serait double de sa hauteur. S'il n'y avait aucun frottement entre la surface du poids et celle du plan, une puissance, représentée par

une livre, agissant parallèlement au plan incliné, serait nécessaire pour tenir le poids en équilibre. Mais, si nous supposons, ce qui a toujours lieu dans la réalité, que les surfaces du poids et du plan incliné éprouvent entre elles un frottement quelconque, ce frottement concourt, avec la puissance, à résister à la descente du poids le long du plan incliné; et par conséquent la puissance nécessaire pour maintenir le poids en équilibre, doit être diminuée en raison de l'intensité du frottement.

Supposons maintenant un poids suspendu à une poulie mobile, montant ensemble, à un poids total de deux livres; si la corde n'a aucune rigidité, si elle passe sans aucun frottement sur les poulies; si les poulies elles-mêmes se meuvent sans frottement, soit dans leurs chapes, soit sur leurs axes, la puissance nécessaire pour maintenir le poids en équilibre sera d'une livre.

Mais, si, d'un autre côté, la corde a une raideur qui exige l'emploi d'une certaine force pour la courber autour des poulies; si, en passant sur celles-ci, la rudesse de sa surface et de celle des poulies elles-mêmes, produit un frot-

tement et par conséquent une résistance; enfin, si les poulies frottent contre leur chape ou contre le moufle, ainsi que sur leurs axes ou pivots, toutes ces résistances ne peuvent être surmontées que par une portion considérable de l'effet produit par le poids, et par conséquent elles concourent, avec la puissance, à maintenir le poids en équilibre; de sorte que, pour obtenir cet équilibre, la puissance doit être diminuée en raison de toutes ces résistances.

Ainsi donc, dans les cas d'équilibre, ou en *Statique*, et dans le sens que nous avons expliqué, on peut dire que les forces passives ou résistantes *aident* ou *assistent* la puissance.

L'effet contraire a lieu en *Dynamique*, c'est-à-dire lorsqu'on emploie la puissance, non-seulement à maintenir le poids en équilibre, mais encore à le mettre en mouvement. Dans ce cas, les forces résistantes s'opposent à la puissance et lui enlèvent une partie de son efficacité.

Reprenons les mêmes exemples.

Supposons qu'un poids de deux livres soit placé sur un plan incliné, dont la longueur serait égale à deux fois sa hau-

teur ; s'il n'y a pas de frottement entre les surfaces du poids et du plan incliné, une puissance quelconque qui excéderait une livre, ferait monter le poids sur le plan incliné.

Mais cela n'aura plus lieu, dans le cas où il y aurait frottement entre les deux surfaces, et nous avons dit que ce frottement n'était jamais détruit. En effet, une puissance d'une livre étant seulement suffisante pour maintenir le poids en équilibre, dans la supposition qu'il n'y ait pas de frottement, si cette puissance n'est que faiblement augmentée, elle ne sera pas suffisante pour faire monter le poids dans le cas réel où il y a frottement, c'est-à-dire pour surmonter, pour vaincre la résistance produite par le frottement. Effectivement le poids ne commencera à monter sur le plan incliné, que lorsque la puissance d'une livre sera suffisamment augmentée pour compenser le frottement.

Lorsqu'on y aura ajouté précisément cette quantité, le poids restera encore en repos, mais sera alors, relativement à son mouvement d'ascension sur le plan incliné dans la même situation que si la puissance n'était encore que d'une livre,

et qu'il n'y eût pas de frottement. Alors la moindre addition que puisse recevoir la puissance, entraînera le poids.

Il résulte donc, de ce que nous venons d'exposer, que le frottement nécessite une puissance moindre pour maintenir le poids en équilibre, et une puissance plus grande pour le mettre en mouvement sur le plan incliné, que dans le cas supposé où il n'y aurait pas frottement.

Il en est de même pour le cas cité plus haut de la poulie mobile. S'il n'existait aucune des résistances que nous avons signalées, une puissance qui excéderait une livre, mettrait le poids en mouvement. Mais, comme ces résistances existent, il faut, avant que le mouvement puisse commencer, augmenter suffisamment la puissance pour compenser ces résistances. Alors la moindre addition que puisse recevoir la puissance produira le mouvement.

Nous pouvons donc déduire, de ce qui précède, la conséquence suivante : en général, quand une machine est destinée à supporter un poids, ou à faire équilibre à une résistance quelconque, les forces actives ou résistantes s'ajoutent à la

puissance, concourent à son effet, et produisent, par conséquent, un avantage mécanique.

Dans beaucoup de cas, les forces résistantes ou passives, constituent toute la puissance et toute l'efficacité de la machine. Ainsi, lorsqu'on emploie des vis pour lier ou réunir ensemble les parties d'une construction quelconque, le frottement des vis, dans les substances qu'elles traversent, les empêche de les quitter, et constitue toute leur efficacité. De même, dans l'emploi qu'on fait des clous qui ne sont autre chose que de petits coins, pour le même but, le frottement empêche qu'ils ne sortent de la substance dans laquelle on les a enfoncés et constitue toute leur efficacité à retenir liées les diverses parties qu'ils maintiennent assemblées.

L'emploi ordinaire du coin lui-même présente à la fois l'exemple de l'avantage statique et du désavantage dynamique des forces passives ou résistantes. Par exemple, lorsqu'on fend un morceau de bois, le frottement considérable produit entre les faces du coin et la surface du bois, oppose une résistance énorme aux effets de la force de

percussion, appliquée à la tête du coin pour l'enfoncer dans le bois, et par conséquent il s'enfoncé avec beaucoup moins de force que s'il n'y avait pas de frottement.

Mais, lorsque le coin s'est enfoncé à une profondeur quelconque, ce même frottement l'empêche de reculer pendant l'intervalle de tems qui s'écoule entre deux coups successifs sur sa tête. En effet, s'il n'y avait pas de frottement, on serait obligé d'enfoncer le coin au moyen de la pression, au lieu d'employer la force de percussion qui est beaucoup plus efficace. Le frottement, qui empêche le recul du coin, dans l'intervalle qui s'écoule entre deux coups successifs, est beaucoup plus avantageux au résultat total, qu'il ne lui est nuisible en s'opposant à l'enfoncement du coin.

(4) Les lois qui gouvernent les forces passives ou résistantes sont toutes déduites entièrement de l'expérience, et il n'existe aucun principe simple et général d'où l'on puisse les déduire par le raisonnement mathématique.

Il est surtout à regretter que, même les expériences les mieux conduites parini le grand nombre de celles qui ont été

tentées, présentent des contradictions manifestes, et que des divergences d'opinion se soient élevées parmi les plus respectables autorités, relativement aux propriétés de ces forces et aux lois qui les gouvernent.

Nous donnerons un précis général de celles de ces propriétés sur lesquelles les savans sont d'accord, et nous ferons connaître les cas dans lesquels les divers systèmes d'expériences ont produit des résultats contradictoires ou seulement différens.

Bien que nous venions d'établir que les lois qui gouvernent les forces passives, sont entièrement déduites de l'expérience, il n'en résulte pas, pour cela, que les principes généraux de la science soient sans utilité. Ils peuvent servir, au contraire, à nous guider dans le choix d'expériences mieux calculées, pour développer ou découvrir celles de ces lois qui sont encore l'objet des recherches des savans, ainsi qu'à nous montrer le peu de certitude de quelques autres expériences, qui auraient pu nous induire en erreur si nous avions compté sur leurs résultats; enfin, ces mêmes principes peuvent nous servir à déduire, des ré-

sultats de ces recherches expérimentales, plusieurs applications pratiques d'une grande utilité.

Nous commencerons nos observations par l'examen du *frottement*, la plus importante de toutes les forces passives ou résistantes sur lesquelles nous appellerons l'attention du lecteur.



CHAPITRE II.

DU FROTTEMENT PRODUIT PAR UNE SURFACE GLISSANT SUR UNE AUTRE.

(5) Le frottement suppose nécessairement que la surface d'un corps se meut ou tend à se mouvoir sur la surface d'un autre. Il suppose encore évidemment qu'une des surfaces est poussée contre l'autre, et y exerce un degré sensible de pression.

Dans ces deux circonstances, la cause du frottement est dans l'imperfection du

poli des surfaces en contact; les petites aspérités qui hérissent ces surfaces, s'engrènent, pour ainsi dire, les unes dans les autres; lorsque ces surfaces viennent à se toucher; et, lorsqu'un effort quelconque tend à mettre ces surfaces en mouvement l'une sur l'autre, les aspérités qui les recouvrent, s'opposent les unes aux autres, et, par conséquent, au mouvement qu'on tente d'imprimer aux corps.

On peut concevoir la manière dont cet effet est produit, en plaçant l'une sur l'autre deux brosses, les soies tournées en dedans et en les pressant, dans cette position, dans la direction des soies, pour que celles-ci s'insèrent, se placent les unes entre les autres. Les efforts qu'on ferait ensuite pour faire mouvoir une des brosses sur l'autre, dans une direction perpendiculaire à celle des soies, éprouveraient une résistance considérable.

Les petites inégalités dont sont revêtues les surfaces soumises au frottement, agissent les unes sur les autres de la même manière que les soies des brosses; et, comme il est évident que, plus la force avec laquelle les brosses sont pressées l'une contre l'autre est grande, plus la

résistance latérale a d'intensité; de même on a invariablement remarqué, que plus la force qui presse les surfaces l'une contre l'autre est grande, plus le frottement est considérable.

(6) Il y a trois espèces de frottemens, ou, pour parler plus exactement, trois circonstances dans lesquelles les surfaces peuvent se mouvoir les unes sur les autres, et dans lesquelles le frottement agit d'une manière différente.

La première est celle dans laquelle un corps dont la base est plane, *glisse* sur une surface plane d'un autre corps.

La seconde est celle dans laquelle un corps cylindrique roule sur la surface d'un autre corps.

La troisième est celle dans laquelle un cylindre solide, placé dans un cylindre creux d'un plus grand diamètre, se meut en tournant dans celui-ci, lorsqu'il est pressé dans une certaine direction par une force quelconque.

Nous considérerons successivement le frottement dans ces diverses circonstances.

(7) On pourrait considérer, comme une loi établie d'une manière satisfaisante par l'expérience, que, dans des circon-

stances semblables, le frottement d'une surface se mouvant sur une autre, est en raison de la pression, exercée sur les deux surfaces à la fois. Considérant, pour le moment, cette loi comme exacte et certaine, nous allons expliquer les expériences au moyen desquelles on peut l'établir.

Soit A B, *fig.*, 1^{re}, *pl.* I-II, un plan parfaitement de niveau, dont la surface est une de celles soumises à l'expérience du frottement.

Soit C D, un morceau de la substance dont la surface inférieure doit se mouvoir en contact avec la surface du plan A B, ces deux surfaces étant celles dont on veut expérimenter le frottement. La partie supérieure de C D, est disposée de manière à recevoir des poids, pour faire varier, à volonté, la pression de C D, sur le plan A B. En D est attachée une corde; maintenue parallèle au plan A B, au moyen d'une poulie fixe P sur laquelle elle passe; à son autre extrémité est attaché un plateau de balance S, sur lequel on place des poids qui ont pour effet, de faire glisser le corps C D sur le plan A B.

Maintenant, supposons que C D soit

chargé de manière que son propre poids et la charge qu'il porte, réunis, fassent une livre. Mettons ensuite du sable fin dans le plateau S, jusqu'à ce qu'il soit suffisamment chargé pour faire mouvoir le corps C D; le poids du sable et celui du plateau S, représenteront nécessairement le frottement. Supposons que ces deux poids réunis fassent une demi-livre.

Si maintenant on charge le corps C D d'une autre livre, de manière que sa pression sur le plan A B soit le double de celle qu'il exerçait auparavant, on trouvera qu'il faut placer sur le plateau S une demi-livre de plus, pour mettre le corps C D en mouvement, et que par conséquent, lorsque la pression est doublée, le frottement est également doublé.

Si, continuant l'expérience, on place successivement sur le corps C D une troisième, une quatrième, une cinquième, etc. livre, on remarquera qu'il est nécessaire d'ajouter successivement au plateau S, une troisième, une quatrième, une cinquième, etc. demi-livre pour vaincre le frottement.

Enfin, à quelque point qu'on pousse cette expérience, elle démontrera que, quelle que soit l'augmentation de la pression, le frottement sera augmenté dans le même rapport.

Tels sont les résultats des expériences faites par Coulomb et Ximenès, sur une très-grande échelle et variées sous toutes les formes. Néanmoins, dans les cas extrêmes, ils remarquèrent que cette loi éprouvait une légère déviation; car, lorsque les pressions exercées sur les surfaces étaient extrêmement intenses, il leur parut que le frottement n'augmentait pas entièrement dans le même rapport que la pression. Cette exception à la loi générale, était néanmoins si faible, et n'avait lieu que dans des cas tellement extrêmes, qu'on a pu la négliger sans erreur sensible.

Considérant donc le frottement comme étant en raison de la pression, lorsque les surfaces sont données, ou restent les mêmes, on en déduit une conséquence très-remarquable qui est celle-ci :

De quelque manière qu'on fasse varier la grandeur de la surface de contact du corps immobile, le frottement restera

le même, tant que la pression ne changera pas.

Supposons, par exemple, que le corps C D soit un morceau de bois plat, un bout de planche, si l'on veut, dont les deux grandes surfaces aient seize pouces carrés, tandis que la surface de l'un de ses bords ou de son épaisseur, n'aurait qu'un pouce carré; le frottement du corps C D sur le plan A B sera le même, soit qu'on le place sur une de ses grandes surfaces, soit qu'on le place sur son épaisseur.

Pour mieux nous faire comprendre, supposons que le poids du corps C D, soit de seize onces, et que lorsqu'il est placé sur le plan A B dans le sens de son épaisseur, son frottement déterminé par les poids placés dans le plateau S, soit représenté par huit onces. Il en résulterait alors que le frottement sur un pouce carré de surface serait égal à la moitié de la pression, sur ce pouce carré.

Maintenant, supposons que le corps A C D, soit placé sur le plan A B dans le sens d'une de ses grandes surfaces qui, comme nous l'avons dit, aurait seize pouces carrés; le poids entier du corps C D est de seize onces, et par con-

séquent la pression sur chaque ponce carré est d'une once. Mais, lorsque la pression sur un seul ponce carré était de seize onces, le frottement était représenté par huit onces, et puisque, dans notre hypothèse, le frottement est en raison de la pression, il en résulte que, dans le cas actuel, où la pression est d'une once sur chaque ponce carré de la surface, le frottement de chaque ponce carré de cette surface doit être d'une demi-once; donc, la surface ayant seize ponces carrés, le frottement total doit être représenté par seize demi-onces ou huit onces, poids exactement égal à celui qui représentait le frottement, lorsque le corps C D était placé sur le plan A B, dans le sens de son épaisseur.

Il est évident que nous aurions obtenu les résultats analogues, si nous avions supposé que les surfaces avaient d'autres grandeurs que celles indiquées plus haut, et que la pression fût également différente.

Nous croyons qu'il sera agréable à ceux de nos lecteurs qui ont une légère connaissance du langage algébrique, de trouver ici une démonstration générale de cette propriété remarquable.

(*) [Supposons que l'unité de surface est un pouce carré et l'unité de pression une livre; appelons P la pression, sur un pouce carré de surface, exprimée en livres et en parties de livres; soit S le nombre de pouces carrés que contient la surface en contact; SP représentera alors la pression totale; soit f le frottement qu'une livre de pression produirait sur un pouce carré de surface, fP représentera le frottement produit par la pression P sur un pouce carré de surface, et fSP le frottement produit par la pression SP , sur la surface S . Si nous appelons F ce frottement total, nous aurons $F = fSP$, mais SP est la pression totale ou le poids du corps; si nous appelons W cette pression, nous aurons $F = fW$, qui est indépendant de la grandeur de la surface en contact.]

Les résultats que nous avons obtenus comme conséquence du rapport du frot-

(*) Ceux de nos lecteurs qui ne sont pas familiarisés avec les raisonnemens mathématiques peuvent passer les paragraphes renfermés entre deux crochets [...].

tement à la pression, sont pleinement confirmés par les expériences de Coulomb et de Ximenès. Ils ont constaté que, lorsqu'une masse de substance quelconque a plusieurs faces de diverses grandeurs, le frottement est le même, quelle que soit la face sur laquelle le corps est placé. Cependant, comme dans les expériences précédentes, cette loi souffre une légère exception, dans un cas extrême : car, lorsque la pression est très-faible, et que la surface en contact est très-grande, le frottement est un peu plus grand qu'il ne le serait avec une surface moindre.

(8) Il existe une autre méthode de prouver, par l'expérience, le rapport du frottement à la pression. Cette méthode est basée sur les propriétés du plan incliné.

Soit un corps *W*, *fig. 2, planch. I-II*, placé sur un plan incliné *AB*, adapté, au moyen d'une charnière, au plan horizontal *CB*, de manière qu'on puisse lui donner à volonté telle ou telle hauteur.

Maintenant supposons que ce plan incliné *AB* soit élevé lentement jusqu'à ce qu'il ait atteint une hauteur telle que

la force de la gravitation, qui tend à faire descendre au corps W le plan incliné, soit juste suffisante pour vaincre le frottement, et que, par conséquent, le corps commence à se mouvoir. Dans ce cas, la force qui tend à faire descendre le plan incliné au corps W est égale au frottement.

Si nous prenons la longueur AB du plan, pour représenter le poids total du corps W , la hauteur AE de ce même plan représentera la force de gravitation qui tend à faire descendre le plan incliné au corps W , et la pression de ce même corps W sur le plan, sera représentée par la base BE du plan incliné.

Le rapport du frottement à la pression sera donc le même que celui de AE à BE .

Maintenant supposons que le poids du corps W soit successivement doublé, triplé, quadruplé, etc. On remarquera que la même élévation du plan continuera à vaincre le frottement et à mettre le corps W en mouvement. Par conséquent le rapport entre le poids, le frottement et la pression, continuera d'être le même. Une double ou triple pression

produira toujours un degré double ou triple de frottement, et ainsi de suite.

[Le rapport constant qu'on remarque entre le frottement et la pression, peut-être exprimé par l'ouverture de l'angle $A B E$, qui rend égale au frottement la force qui tend à faire descendre le corps W le long du plan incliné.

Appelons X cet angle, F le frottement et P la pression; d'après ce que nous avons déjà démontré, nous avons

$$F : P :: A E : B E;$$

$$\text{Mais } A E : B E :: \text{tang. } X : 1;$$

$$\therefore F : P :: \text{tang. } X : 1;$$

$$\therefore F = P \text{ tang. } X.$$

Il en résulte, par conséquent, que la tangente de cet angle exprime toujours le rapport de la pression au frottement.]

Le plan incliné peut également servir à prouver, par l'expérience, que le frottement est entièrement indépendant de la grandeur de la surface en contact: car, quelle que soit celle des faces du corps W qui touche le plan incliné, l'angle X restera toujours le même, et,

par conséquent, le rapport entre le frottement et la pression, ne sera pas changé.

(9) D'après une autre loi, déduite de l'expérience, *le frottement est une force uniformément retardatrice* ; c'est une loi sur laquelle il n'existe pas la moindre divergence d'opinion, et les résultats de toutes les expériences faites à ce sujet, sont parfaitement concordans entre eux.

On se rappellera qu'une force uniformément accélératrice, comme celle que nous avons expliquée dans notre premier Traité de Mécanique, est une force qui donne au corps en mouvement un accroissement de vitesse proportionné au tems de son mouvement, et que le mouvement d'un corps animé par une telle force est caractérisé par plusieurs propriétés remarquables, telles que celles-ci :

Les espaces décrits depuis le commencement du mouvement, sont proportionnels au carrés des tems employés à les décrire ; les espaces décrits dans des intervalles égaux et successifs de tems, sont entre eux comme les nombres 1, 3, 5, 7, etc. Eh bien, une force uniformément retardatrice, est, au

contraire , une force qui détruit une partie de la vitesse du corps en mouvement, et la quantité de vitesse ainsi détruite, est proportionnelle au tems du mouvement.

Si un corps est soumis , à la fois , à l'action de deux forces , dont la plus grande serait uniformément accélératrice et la plus petite une force uniformément retardatrice, l'effet évidemment produit sera que le corps se mouvra avec une vitesse uniformément accélérée, égale à la différence entre les deux forces à l'action desquelles il est supposé soumis.

Mais , si la force qui retarde la vitesse du corps n'est pas uniforme , tandis que la force qui accélère cette vitesse est elle-même uniforme , la vitesse avec laquelle le corps se mouvra , et qui sera égale à la différence des deux forces qui agissent sur lui , ne sera par uniformément accélérée, puisque le manque d'uniformité dans la force retardatrice, modifiera entièrement la différence entre les deux forces.

Si donc un corps se meut avec une vitesse uniformément accélérée , et s'il est soumis à l'action de deux forces , l'une accélératrice , l'autre retardatrice ,

nous pourrons en conclure, avec certitude, que, si la force accélératrice est uniforme, la force retardatrice est également uniforme; car, sans cela, d'après les principes que nous venons d'établir, la vitesse du corps ne serait pas uniformément accélérée.

Ces observations préliminaires une fois posées, nous allons entreprendre d'expliquer les expériences qui prouvent que le frottement est une force uniformément retardatrice.

(10) On dispose un appareil comme celui que nous avons décrit au numéro 7, *figure 1^{re}*, mais dont le plan horizontal A B a une longueur considérable.

Le corps C D est placé près de l'extrémité A, et l'on suspend, en S, un poids suffisant pour faire mouvoir le corps le long du plan de A vers B. La descente du poids S est mesurée par une échelle verticale graduée, semblable à celle employée dans la machine d'Atwood (Voyez le premier *Traité de Mécanique*, n° 37, *fig. 8 et 9*), et le tems employé à descendre l'est également par un pendule à secondes.

En se mouvant, sur le plan, de A

vers B, le corps C D est soumis à l'action de deux forces, dont l'une, celle avec laquelle le poids S l'entraînerait, indépendamment du frottement, est uniformément accélératrice ; l'autre est la force retardatrice, produite par le frottement.

D'après les principes que nous avons établis au n° 9, il résultera immédiatement que le frottement est une force uniformément retardatrice, si nous pouvons démontrer, par l'expérience, que le mouvement du corps C D est uniformément accéléré.

En effet, puisque la force tout entière du poids S est uniformément accélératrice, et que le mouvement du corps C D est uniformément accéléré, la force retardatrice doit être uniforme.

Disposons les choses de manière que le corps C D commence son mouvement au moment où le pendule frappe une seconde, et, au moyen d'essais successifs, plaçons sur l'échelle verticale graduée, une pièce d'arrêt au point précis où arrive le poids S au moment où se fait entendre le bruit de la deuxième seconde, on déterminera ainsi l'espace que parcourt le corps C D en une seconde.

Les mêmes procédés de tâtonnement nous feront connaître les espaces que ce même corps CD parcourrait en deux, trois, quatre, enfin en un aussi grand nombre de secondes que le permettrait la longueur du plan horizontal AB .

Si nous trouvons que ces espaces sont entre eux dans le même rapport que les carrés des nombres 1, 2, 3, 4, 5, etc. Nous pourrions en conclure que le mouvement du corps CD est uniformément accéléré; si ce rapport n'est pas le même, nous en concluerons que son mouvement n'est pas uniformément accéléré. (Voyez le premier *Traité de Mécanique*, chapitre III.)

Dans une série d'expériences, faites avec le plus grand soin, le professeur Vince, de Cambridge, a démontré que cette loi était constamment de la plus rigoureuse exactitude.

Nous pouvons donc affirmer avec certitude que *le frottement est une force uniformément retardatrice*.

On pourrait tirer la même conclusion des expériences faites avec le plan incliné.

Si l'on donne à ce plan une hauteur telle que le corps placé dessus puisse le

parcourir en descendant, on remarquera que le mouvement de ce corps est uniformément accéléré. Puisque la force qui entraîne le corps au bas du plan, indépendamment du frottement, est une force uniformément accélératrice, il résulte des principes précédemment établis, que le frottement doit être une force uniformément retardatrice.

(11) La loi que nous avons expliquée du rapport entre la pression et le frottement, dans des circonstances données, a été déduite d'un grand nombre d'expériences variées, exécutées par plusieurs savans, notamment par Coulomb et Ximènes. Elle était restée sans contradicteur, jusqu'à ce que le professeur Vince, de Cambridge, ayant répété ces expériences, et en ayant fait de nouvelles, obtint des résultats qui l'engagèrent à conclure que cette loi n'existe pas, ou du moins qu'elle n'est pas rigoureuse.

Nous allons maintenant entrer dans quelques détails sur les expériences dont le professeur Vince a obtenu des résultats différens de ceux de Coulomb.

Lorsque le corps CD est mis en mouvement sur le plan horizontal AB par l'action qu'exercent sur lui le poids S ,

si l'on fait abstraction du frottement, la vitesse avec laquelle le corps CD se meut, dépend du rapport qui existe entre le poids S et le poids du corps CD . Il en résulte donc que, si le corps CD et le poids S sont tous deux augmentés dans le même rapport, la force accélératrice indépendante du frottement restera la même.

Si le frottement est en raison de la pression, il sera augmenté dans le même rapport que le poids du corps CD ; mais alors le poids du corps CD , qui produit la force retardatrice est accru dans le même rapport, et, par conséquent, le degré de ralentissement qu'il produit doit être le même.

Il en résulte donc que, puisqu'en augmentant le poids S et celui du corps CD , dans le même rapport, les deux forces qui exercent leur action sur le corps CD , c'est-à-dire la force accélératrice et la force retardatrice, restent les mêmes, leur différence, qui est la force accélératrice actuelle qui met en mouvement le corps CD , reste également la même.

Par conséquent, en accordant la proportionnalité du frottement et de la

pression, il ne devrait en résulter aucun changement dans la vitesse du mouvement du corps CD , lorsque ce corps et le poids S sont doublés, triplés ou augmentés ou diminués dans tout autre rapport.

[Quelques-uns de nos lecteurs verront, sans doute, avec plaisir, une démonstration mathématique rigoureuse de ce raisonnement.

Appelons m la quantité de matière que renferme le corps CD , m' la quantité de matière contenue dans le poids S ; g la force accélératrice de la gravitation, et f le rapport constant de la pression, et $m'g$ sera la force motrice qui met en mouvement les masses combinées m et m' .

En conséquence, la vitesse accélérée avec laquelle le corps CD et le poids S se meuvent indépendamment du frottement, est

$$\frac{m'g}{m+m'},$$

puisque la force accélératrice est égale à la force motrice divisée par la quantité de matière que contiennent le corps CD et le poids S .

Mais $f m$ exprime une force motrice

qui est égale au frottement du corps CD sur le plan horizontal AB ; et comme cette force agit en retardant le mouvement des masses combinées m et m' , la force retardatrice correspondante est

$$\frac{fm}{m + m'}.$$

La force accélératrice actuelle, étant la différence entre cette force retardatrice et la force accélératrice totale, est donc

$$\frac{g m' - f m}{m + m'}.$$

Si l'on donne à cette expression la forme suivante,

$$\frac{g - f \frac{m}{m'}}{\frac{m}{m'} + 1},$$

il est évident que sa valeur ne doit pas dépendre des valeurs absolues de m et de m' , mais seulement de leur rapport ; et que, tant que ce rapport reste le même, la force accélératrice qui fait

mouvoir le corps CD sur le plan horizontal AB , reste également la même.]

Si l'expérience prouvait qu'en augmentant le poids S et celui du corps CD , dans le même rapport, la force accélératrice qui fait mouvoir le corps CD sur le plan horizontal AB , ne reste pas la même, mais est augmentée, qu'en pourrait-on conclure?

Cette partie de la force accélératrice qui est indépendante du frottement, dépend entièrement du rapport qui existe entre le poids S et celui du corps CD , comme nous l'avons déjà expliqué, et, par conséquent, l'accroissement de la force accélératrice qui met ce corps en mouvement doit nécessairement provenir d'une diminution de la force retardatrice, force qui est produite par le frottement.

Mais cette force retardatrice dépend de deux choses; d'abord du rapport entre le frottement et la pression, ensuite du rapport entre le poids S et le poids du corps CD .

Ce dernier rapport ne changeant pas, nous sommes forcés d'en conclure que le premier doit diminuer, c'est-à-dire,

que le frottement n'augmente pas dans le même rapport que la pression ; mais dans un rapport moindre.

[Voici comment les mathématiciens exprimeraient ce raisonnement. Appelons C la force accélératrice avec laquelle le corps $C D$ est mis en mouvement sur le plan horizontal $A B$, nous avons alors

$$C = \frac{g m' - f m}{m + m'} = \frac{g}{\frac{m}{m'} + 1} -$$

$$\frac{f \frac{m}{m'}}{\frac{m}{m'} + 1}.$$

Supposons qu'en augmentant m et m' , dans le même rapport. C se trouve augmenté. La première partie,

$$\frac{g}{\frac{m}{m'} + 1}$$

de la valeur de C , reste évidemment de

la même valeur qu'auparavant; par conséquent la seconde partie,

$$f \frac{\frac{m}{m'}}{\frac{m}{m'} + 1}$$

doit nécessairement être diminuée. Mais le facteur,

$$\frac{\frac{m}{m'}}{\frac{m}{m'} + 1}$$

reste le même; c'est donc f qui doit être diminué. Or f exprime le rapport entre le frottement et la pression qui doit, par conséquent, être moindre dans l'application dont nous nous occupons.]

(12) Tels sont les principes que le docteur Vince déduisit de ses expériences. Il remarqua que, lorsqu'il doublait ou triplait le poids S , et celui du corps CD , la force accélératrice qui mettait le corps CD en mouvement, était continuellement augmentée,

Ainsi , par exemple , lorsque le corps CD pesait 10 onces, et le poids S 4 onces, l'espace parcouru , en 2 secondes , par par le poids S et le corps CD , était de 51 pouces ; lorsque le corps CD pesait 20 onces, et le poids S 8 onces , l'espace parcouru par eux , également en deux secondes , était de 56 pouces ; lorsque le corps CD pesait 30 onces et le poids S 12 onces , ils parcouraient 63 pouces également en deux secondes. De nombreuses expériences produisirent constamment un résultat analogue.

Le professeur Vince conclut donc , de ces expériences, *que bien que le frottement augmente lorsque la pression est augmentée , cet accroissement de frottement est dans un rapport moindre que l'accroissement de pression.* Qu'ainsi , lorsque la pression est doublée , le frottement n'est pas tout-à-fait deux fois ce qu'il était auparavant ; que , de même , lorsque la pression est triplée , le frottement ne l'est pas entièrement , et ainsi de suite.

Si l'on admet cette conclusion , qui diffère , comme on le voit , des doctrines jusqu'alors adoptées , il en résulte une conséquence immédiate , également in-

compatible avec ce que l'on considèrerait comme une propriété reconnue du frottement.

En effet, nous avons démontré que, si le frottement est en raison de la pression, il ne dépendra nullement de la grandeur de la surface de contact, et que, sur quelque face qu'on place le corps, le frottement sera toujours le même; mais, si, d'après les résultats obtenus par le professeur Vince, le frottement augmente dans un rapport moindre que la pression, il en résulte que, la pression restant la même, le frottement augmentera lorsque la surface de contact sera agrandie.

Pour mieux nous faire comprendre, supposons, comme nous l'avons fait au numéro 7, que le corps C D pèse 16 onces, que ses deux grandes faces ont 16 pouces carrés, et que son épaisseur présente une surface d'un pouce carré.

Lorsque le corps C D est placé sur l'une de ses grandes faces, on a une pression de 16 onces sur une surface de 16 pouces carrés. Supposons encore que le frottement soit représenté par 8 onces, ou si l'on veut que le poids S doive peser 8 onces, pour pouvoir mettre le corps C D

en mouvement. Par conséquent, chaque pouce carré éprouvera une pression d'une once, produisant un frottement égal à une demi-once.

Maintenant, supposons que le corps C D soit placé dans le sens de son épaisseur; il y aura dans ce cas, une pression de 16 onces sur la surface d'un pouce carré.

La pression d'une once sur une surface d'un pouce carré, produisant, un frottement d'une demi-once, et le frottement croissant dans un rapport moindre que la pression, il en résulte qu'une pression de 16 onces sur une surface d'un pouce carré doit produire un frottement moindre que celui représenté par 8 onces. Par conséquent le frottement, lorsque le corps C D est placé sur l'une de ses grandes faces, est plus grand que lorsqu'il est placé dans le sens de son épaisseur. Il résulte donc de ce que nous venons de dire que, généralement, la pression restant la même, le frottement augmente lorsque la surface de contact est agrandie.

Cette conclusion se trouvant, comme la première, en contradiction avec les opinions précédemment adoptées, le pro-

fesseur Vince la soumit à l'épreuve de nombreuses expériences faites d'après le principe que nous avons déjà expliqué, et en obtint des résultats qui confirmèrent pleinement les conséquences qu'il avait déduites.

Il constata que le mouvement du corps C D sur le plan A B, produit par un poids donné S, était toujours d'autant plus accéléré, que la surface de contact était moins grande, la pression restant la même; d'où il résultait, d'après les principes déjà expliqués, que le frottement était diminué.

Par exemple, dans une de ses expériences, la grande face du corps C D était avec la surface de son épaisseur, dans le rapport de 22 à 9. Le même poids S qui lui faisait parcourir, sur le plan A B, 33 $\frac{1}{2}$ pouces en deux secondes, lorsqu'il était placé sur la grande base, lui en faisait parcourir 47, dans le même intervalle de tems, lorsqu'il était placé dans le sens de son épaisseur.

Dans un autre cas, les deux faces de contact, c'est-à-dire la grande face du corps C D et la surface de son épaisseur, étaient dans le rapport de 32 à 3; l'espace que le poids S lui fit parcourir,

sur le plan horizontal A B, fut de 32 pouces en deux secondes, lorsque le corps C D était placé sur sa grande face, et de 37 pouces dans le même tems lorsqu'il était placé dans le sens de son épaisseur.

Un grand nombre d'autres expériences produisirent des résultats analogues.

(13) La plupart des expériences d'après lesquelles on avait établi la loi de la proportionnalité entre la pression et le frottement, avaient été faites sur un principe différent de celui adopté par Vince. Dans ces expériences, on mesurait généralement le frottement par la force nécessaire pour mettre en mouvement le corps C D placé en repos sur un plan horizontal A B.

Vince a présenté plusieurs objections contre cette manière de mesurer le frottement.

En premier lieu, il a fait remarquer que la force nécessaire pour *mettre le corps en mouvement*, doit être nécessairement plus grande que le frottement.

Cette objection, en stricte théorie est sans contredit valable; mais si on la considère sous le rapport pratique, on la trouvera d'une faible importance.

Il est très-vrai que la force qui est

égale au frottement est le poids qui ferait exactement équilibre au frottement; et, sans mettre le corps en mouvement, le tiendrait dans une situation telle que la plus petite force additionnelle qu'on puisse imaginer, pût déterminer ce mouvement. En conséquence, si l'expérience était parfaitement bien exécutée, le poids exactement nécessaire pour produire le mouvement, ne serait supérieur à celui qui représenterait le frottement, que d'une quantité tellement faible, qu'elle ne produirait aucun effet sensible sur les résultats de l'expérience.

Une autre objection de Vince était celle-ci : la force qui s'oppose à ce que le corps passe de l'état de repos à l'état de mouvement, n'est pas seulement le frottement, mais le frottement et la cohésion réunis; cette dernière force étant généralement plus grande que la première (*).

Pour confirmer cette assertion, il fit plusieurs expériences, au moyen desquelles il constata que la force néces-

(*) On nomme cohésion, la force qui unit entre elle, les molécules des corps solides.

saire pour mettre un corps en mouvement est beaucoup plus grande que celle qui continue uniformément le mouvement, prétendant que cette dernière force est la véritable mesure du frottement.

A la vérité, Coulomb a expressément mentionné et soigneusement expérimenté que la résistance qu'oppose un corps en repos sur un autre, à la force qui tend à le mettre en mouvement, est plus grande que le frottement du même corps, lorsqu'il a commencé à se mouvoir. Mais il attribue cette résistance, entièrement au frottement, et par conséquent l'un des principes qu'il posa, comme résultat de l'expérience, est que le frottement d'un corps en repos est plus grand que le frottement du même corps en mouvement.

Coulomb trouva que ce frottement d'un corps en repos (nous l'appellerons *frottement* pour le moment) s'accroît jusqu'à une certaine limite, par la durée du contact. C'est-à-dire que, lorsqu'un corps est placé en repos sur un autre, le frottement des surfaces en contact s'accroît pendant un certain tems, jusqu'à ce qu'il soit devenu le plus grand possi-

ble , et qu'alors il reste constant. Car , quel que soit l'intervalle de tems pendant lequel ces corps peuvent rester en contact après cette limite, le frottement n'augmente plus.

L'intervalle de tems nécessaire pour que deux corps atteignent ainsi leur plus grand degré de frottement , fut reconnu différent pour différens corps. Lorsque les corps sont tous deux de bois , il leur faut une minute ou deux pour acquérir leur plus grand degré de frottement. S'ils sont tous deux de métal, le tems est si court qu'il n'est pas possible de le déterminer. Lorsque du bois est placé sur une surface métallique, le frottement continue à augmenter pendant plusieurs jours.

Toutes les opinions sont donc d'accord pour convenir que la résistance des corps en repos est plus grande que le frottement d'un corps en mouvement sur un autre ; et la seule question à décider consiste à savoir si cette résistance est entièrement due au frottement ou aux effets combinés du frottement et de la cohésion , et , si cette dernière hypothèse est vraie , quel est le rapport entre la cohésion et le frottement ?

Les raisonnemens du professeur Vince

sur cette question, nous paraissent loin d'être concluans :

En effet, il affirme d'abord gratuitement que la résistance des corps en repos est due aux effets combinés du frottement et de la cohésion. Nous sommes très-peu disposés à nous ranger ici à son opinion ; car si nous accordons, dans ce cas, l'existence d'une force résistante telle que la cohésion, nous pourrions difficilement nous refuser à accorder aussi que cette force soit combinée plus ou moins avec le frottement, dans la résistance qu'un corps en mouvement sur un autre oppose à la force motrice qui agit sur lui.

Une autre difficulté se présente encore sur les résultats des expériences mêmes de Vince. Le mouvement d'un corps sur un autre doit-il entièrement détruire la force de cohésion ? Si cela n'a pas lieu, pourquoi attribuer entièrement au frottement la résistance qu'oppose, à la force motrice, un corps qui se meut sur un autre, tandis que la résistance que le même corps en repos, oppose également à cette force, est attribuée aux effets combinés du frottement et de la cohésion ? Nous ne pousserons pas plus loin cette objection. Vince affirme en

outre que tout l'excès de la résistance des corps en repos sur le frottement de ces mêmes corps en mouvement l'un sur l'autre, est le résultat de la cohésion. Il y a évidemment, dans cette assertion, une reconnaissance tacite que le frottement des corps en repos est égal à celui des corps en mouvement; puisque toute la résistance des corps en repos est due à la somme des effets de leur frottement et de leur cohésion. Il ajoute enfin que si on soustrait de cette somme, le *frottement en mouvement* on aura pour reste *l'effet de la cohésion*.

S'il est nécessaire de tenir compte, dans les recherches de ce genre, du rapport qui peut se trouver entre le frottement et la cohésion, il eût été à désirer que l'expérience eût déterminé ce rapport. Nous avons lieu de croire que si ces expériences étaient faites, le résultat serait bien différent de celui qu'a supposé Vince; et nous pourrions même assurer que, dans beaucoup de cas, on trouverait que la cohésion serait beaucoup moindre que le frottement, et que par conséquent, le *frottement en repos* serait beaucoup plus considérable que le *frottement en mouvement*.

On pourrait, ce nous semble, déterminer, par le procédé suivant, le rapport entre le frottement et la cohésion : qu'on attache à un corps en repos sur le plan horizontal A B, une corde qui soit directement au-dessus du centre de gravité de ce corps; qu'on fasse passer cette corde sur une poulie fixe qui la tienne dans une direction verticale, et qu'enfin, on adapte à son autre extrémité un poids exactement égal à celui du corps en repos sur le plan horizontal A B. Ce poids fera équilibre à celui du corps, et la force avec laquelle il adhérerait au plan sera uniquement la cohésion : qu'on ajoute alors de légers poids, ou du sable, au poids qui fait ainsi équilibre à celui du corps, jusqu'à ce que celui-ci soit enlevé de dessus le plan horizontal A B. Ce poids additionnel peut être considéré comme la mesure de la cohésion ; et, si on le soustrait du poids qui serait exactement nécessaire pour mettre le corps en mouvement dans une direction parallèle au plan A B, comme dans toutes les expériences précédentes, le reste de cette soustraction sera évidemment la mesure exacte du frottement en repos.

Nous n'avons pas eu, dit l'auteur an-

glais, l'occasion de faire d'expériences sur ce principe ; mais nous avons tout lieu de croire que, dans presque tous les cas, la cohésion serait beaucoup moindre que le frottement proprement dit.

Quant à l'accroissement du frottement par la durée du contact, il n'est pas difficile à concevoir, puisque l'effet de la pression, agissant pendant un certain tems, doit être que les diverses inégalités ou aspérités des surfaces en contact, s'engrènent les unes dans les autres, beaucoup plus efficacement qu'elles ne le feraient, si une surface était en mouvement sur l'autre.

On peut s'en rendre compte, comme nous l'avons déjà indiqué avec deux brosses placées l'une sur l'autre. Si l'on met un poids quelconque sur la brosse supérieure, la pression détermine les soies de cette brosse à s'engager entre les soies de la brosse inférieure.

Cela n'aura lieu que pendant un certain tems, les soies de la brosse supérieure cesseront de descendre, mais alors il faudra une force considérable pour mettre la brosse supérieure en mouvement sur la brosse inférieure. Une fois le mouvement obtenu, le même poids

ne pourrait plus produire le même effet, c'est-à-dire, qu'il ne forcerait plus les soies des deux brosses à s'engager aussi fortement les unes dans les autres, puisque, dans aucune des positions que ces soies pourraient prendre pendant le mouvement, elles n'auraient pas un *temps* suffisant pour produire l'effet obtenu lorsqu'elles étaient en repos.

Si l'on examine avec attention ces divers effets, on remarquera qu'ils ont la plus grande analogie, et peut-être la plus exacte correspondance avec les propriétés du frottement déterminées par Coulomb, et que, s'ils ne l'expliquent pas, du moins ils jettent une grande lumière sur le phénomène constaté que le frottement en repos est plus grand que le frottement en mouvement.

Coulomb ne borna pas toutefois ses expériences à la recherche de la quantité de frottement que possèdent les corps, lorsqu'ils passent de l'état de repos à l'état de mouvement. Il examina aussi le frottement des corps pendant le mouvement, et constata, à peu près de de la même manière que le professeur Vince, que ce frottement est une force uniformément retardatrice.

Il examina également quel est, entre différentes substances, le rapport entre le frottement en repos et le frottement en mouvement, et il trouva que ce rapport varie avec l'espèce des substances en expérience.

Il constata que, dans le frottement de bois sur bois, le frottement en repos équivaut à la moitié de la pression, tandis qu'il ne va qu'au huitième dans le frottement en mouvement.

Dans le frottement entre bois et métal, le frottement en repos se trouva être un cinquième de la pression, et le frottement en mouvement d'un douzième.

Il ne remarqua, pour les métaux, aucune différence sensible entre ces deux espèces de frottement.

(14) Les expériences dont nous venons d'entretenir nos lecteurs ayant prouvé que le frottement est une force uniformément retardatrice, il en résulte nécessairement qu'il est indépendant de la vitesse du mouvement, puisqu'il reste le même pendant que la vitesse augmente. En effet, toutes les expériences tendent à confirmer ce raisonnement.

(15) D'après tout ce qui précède, le lecteur concevra facilement qu'il reste

encore beaucoup de découvertes à faire sur la nature et les propriétés du frottement.

Les expériences de Coulomb et de Vince paraissent avoir été exécutées avec une égale précision, et d'après des principes scientifiques également justes ; et, cependant, nous voyons que leurs résultats diffèrent considérablement, en ce qui regarde le principe important et fondamental de la proportionnalité entre le frottement et la pression.

A la vérité les résultats de Coulomb trouvent leur confirmation dans les expériences de Ximenès et d'autres savans ; tandis que Vince, nous le croyons du moins, est le seul dont les conclusions soient différentes de celles de Coulomb.

Les expériences de Ximenès diffèrent néanmoins un peu, par leurs résultats, les unes avec les autres, où avec celle de Coulomb ; mais cette différence paraît due à ce que Ximenès n'a pas tenu compte du frottement en repos dépendant de la durée du contact, et qu'il mettait les corps en mouvement, sans attendre que leur frottement eût atteint son *maximum*.

(16) Outre les résultats que nous

avons mentionnés, Coulomb signala ; dans ses expériences, diverses particularités que nous croyons utile d'indiquer.

1°. Le frottement varie en général avec la *qualité* des surfaces : dans le bois neuf poli, il équivaut à peu près à la moitié de la pression, dans les métaux à un quart, et entre bois et métaux à un cinquième.

2°. Lorsque les surfaces sont usées par le frottement, celui-ci diminue généralement ; mais cette diminution a ses limites, et le frottement a bientôt atteint son *minimum*. Dans les bois, il peut arriver à n'être que le tiers de la pression, au lieu d'en être la moitié.

3°. Dans les bois, le frottement est moindre, lorsque les fibres se croisent les unes les autres, que lorsqu'elles sont placées dans la même direction. Dans le premier cas, le frottement n'équivaut qu'au quart de la pression, et dans le second à la moitié.

4°. En général, le frottement est plus grand entre les surfaces du même genre qu'entre celles d'espèces différentes.

5°. Pendant tout le tems que l'usure diminue le frottement, celui-ci n'est plus une force uniformément retardatrice ; et

par conséquent, jusqu'à ce qu'il ait atteint son *minimum*, il n'est pas indépendant de la vitesse du mouvement.

6°. Le frottement diminue en raison du poli des surfaces de contact. Cependant, si le poli de ces surfaces était poussé trop loin, il en résulterait une résistance considérable, produite par la cohésion.

7°. On diminue le frottement en graissant les surfaces de contact avec quelque substance onctueuse, comme du suif, de l'huile, de la graisse, etc., etc. Coulomb pense que plus la consistance de la substance onctueuse est grande, plus le frottement est diminué ; le suif frais diminue le frottement de moitié.

D'après les résultats des expériences de Vince, il paraîtrait qu'on diminue le frottement en diminuant l'une des surfaces de contact. Mais, même en admettant cette conséquence comme un principe général, il aurait une limite évidente en pratique ; car, si l'une des surfaces est très-petite, et l'autre tendre, la plus petite surface creusera un sillon dans l'autre, et produira ainsi un frottement considérable.



CHAPITRE III.

DU FROTTEMENT D'UN CORPS ROULANT
SUR LA SURFACE D'UN AUTRE,

(17) *Lorsqu'un corps roule sur un autre, il est très-évident que son frottement produit une moins grande résistance au mouvement, que si ce corps glissait, comme dans le genre de frottement dont nous nous sommes occupés dans le chapitre précédent.*

Dans ce cas, les diverses parties d'une surface, sont, jusqu'à un certain point, soulevées de dessus l'autre, et leurs aspérités agissent d'une manière entièrement différente de leur action dans le *glissement* déjà décrit.

L'un, au moins, des deux corps, doit être alors terminé par une surface courbe, et par conséquent sa surface de contact

doit être nécessairement très-petite, ce qui offre une nouvelle cause de diminution du frottement.

Si le corps roulant est cylindrique, les points de contact des deux surfaces, formeront une ligne droite sur la surface du cylindre, soit que la surface sur laquelle il roule, soit plane, ou qu'elle soit celle d'un autre cylindre ayant son axe parallèle à celui du premier; mais si le corps roulant est une sphère, ou un sphéroïde, ou a enfin une forme analogue, la surface de contact sera réduite à un point unique.

Indiquons les moyens de rechercher, par l'expérience, les propriétés de cette espèce de frottement.

Soient A B et C D, *fig. 3, pl. I-II*, deux tables parfaitement planes et dont les surfaces supérieures sont exactement sur le même plan horizontal. Plaçons sur ces tables un cylindre E F dont l'axe soit perpendiculaire à leur longueur. Au milieu de l'intervalle que laissent entre elles les deux tables, passons sur le cylindre une corde très-flexible, ayant à ses deux extrémités des plateaux parfaitement égaux en poids. En plaçant des poids égaux sur ces plateaux, on pourra

produire, sur les deux tables, telle pression qu'on voudra. Si alors on ajoute, soit du sable fin, soit de légers poids; dans l'un des deux plateaux, jusqu'à ce que le cylindre commence à se mouvoir, ce poids additionnel sera égal au frottement.

De cette manière, le diamètre du cylindre, la nature de la substance dont il est formé, aussi bien que la pression qu'il exerce sur les deux tables, peuvent être variés à volonté.

En faisant ces expériences, il serait très-utiles à chacune d'elles, de mettre successivement le sable ou les poids légers dans chaque plateau, jusqu'à ce que le cylindre commençât à se mouvoir dans les deux directions qu'il peut prendre; si les poids qui déterminent ces deux mouvemens diffèrent d'une petite quantité, on prend alors leur valeur moyenne, comme représentant le frottement.

(18) Les résultats obtenus, de cette manière, par Coulomb, dans ses nombreuses expériences, sont les suivans :

1°. Avec le même cylindre, le frottement est en raison de la pression.

2°. Avec des cylindres de même substance, ayant des diamètres différens,

mais avec la même pression, le frottement est en raison inverse du diamètre.

3°. Avec des cylindres de même substance ayant des diamètres différens, et exerçant aussi des pressions différentes, le frottement est en raison directe de la pression et en raison inverse du diamètre; ou en raison composée du rapport direct de la pression, et du rapport inverse du diamètre.

Expliquons ces deux derniers résultats à ceux de nos lecteurs qui ne sont pas familiarisés avec le langage scientifique.

Supposons que deux cylindres de mêmes substances, aient, l'un deux pouces, l'autre cinq pouces de diamètre, et qu'ils exercent tous deux une pression égale sur les tables, on trouvera que le frottement du cylindre de deux pouces de diamètre, est plus grand que celui du cylindre de cinq pouces dans le rapport de cinq à deux. C'est-à-dire que, si le frottement du cylindre de cinq pouces de diamètre est représenté par quatre onces, celui du cylindre de deux pouces de diamètre sera représenté par dix onces.

Supposons maintenant que le cylindre de deux pouces de diamètre, exerce sur

les tables une pression de trois livres, et le cylindre de cinq pouces une pression de sept livres, on trouvera que le frottement du cylindre de deux pouces sera, avec celui du cylindre de cinq, dans le rapport du produit de *cinq multiplié par trois*, avec le produit de *deux multiplié par sept*, ou comme *quinze est à quatorze*.

On a remarqué qu'en graissant les surfaces dans ces expériences, on ne diminuait, en aucune manière, cette espèce de frottement.

Lorsqu'un cylindre d'acajou, de trois pouces de diamètre, roulait sur une surface plane de chêne, ce frottement équivalait à environ un seizième de la pression; et, lorsqu'il roulait sur un plan d'orme, ce frottement était réduit à un centième de la pression.

Il est donc évident qu'entre les mêmes substances, ce genre de frottement est beaucoup moins considérable que celui produit par le glissement.

La corde qu'on emploie dans ce genre d'expériences doit être tellement flexible, que sa raideur ou son épaisseur ne puissent produire aucun effet sensible sur le résultat.

CHAPITRE IV.

DU FROTTEMENT D'UNE SURFACE TOURNANT EN CONTACT SUR UNE AUTRE SANS ROULER.

(19) Si l'on fait tourner un corps, de forme ronde, pressé contre une autre surface, en l'empêchant en même tems de rouler le long de cette surface, on produira une espèce particulière de frottement différente de celles que nous avons examinées dans les deux chapitres précédens.

Ce genre de frottement semble participer de la nature des deux autres. Comme dans la première espèce, une surface glisse sur l'autre; comme dans la seconde, la surface de contact est réduite à une ligne droite, et quelquefois à un point.

Ce frottement est donc d'une espèce

intermédiaire entre les deux autres : il est moindre que le *frottement en glissant*, et plus grand que le *frottement en roulant*.

Essayons d'expliquer les moyens de se rendre compte de ce frottement, et d'en étudier les propriétés.

Soit un axe cylindrique solide A B, *fig. 4, pl. I-II*, inséré dans un cylindre creux, dont le diamètre C B serait plus grand que celui de A B, de manière à permettre au cylindre creux de tourner autour du cylindre solide.

Supposons que ces deux cylindres aient leur axe dans une position horizontale, et que le cylindre creux soit entouré d'une poulie D E dont il serait le centre,

Passons sur la circonférence de la poulie, une corde très-flexible à l'extrémité de laquelle sont attachés deux plateaux de balance G et H.

En conséquence de la forme du cylindre solide et du cylindre creux, et de la manière dont agit le poids de la poulie, les points de contact du cylindre creux et du cylindre solide, seront sur une ligne droite formée par l'intersection d'un plan vertical passant par l'axe

du cylindre solide et la surface intérieure du cylindre creux.

En effet, si, du point de contact B, nous concevons une ligne perpendiculaire au plan du papier, et passant le long de la surface intérieure du cylindre creux, ce cylindre et le cylindre solide se toucheront sur cette ligne et non en tout autre endroit.

Il résulte donc, de ce que nous venons d'exposer, que, si le cylindre creux tourne autour du cylindre solide, comme cela a lieu dans les roues de voitures, chaque partie de la surface du cylindre creux est nécessairement exposé aux effets du frottement; tandis qu'aucune autre partie du cylindre solide, que la ligne qui passe par le point B de la section n'éprouve cette action.

Si, au contraire, comme cela a lieu quelquefois, c'est le cylindre solide qui tourne dans le cylindre creux, il en résulte un effet opposé. La surface entière du cylindre solide est successivement exposée aux effets du frottement, tandis que ces effets n'ont lieu que sur une ligne unique dans le cylindre creux.

En chargeant les plateaux G et H avec des poids égaux, on peut, à volonté,

faire varier la pression sur le cylindre creux. Si, lorsque ces plateaux sont également chargés, on ajoute dans l'un d'eux, dans le plateau H, par exemple, des poids légers ou du sable, jusqu'à ce que ce poids additionnel mette la poulie en mouvement, on pourra déterminer ainsi la quantité de frottement qui existe entre le cylindre solide et le cylindre creux.

Le poids additionnel n'est pas, néanmoins, dans ce cas, la mesure exacte du frottement.

En effet, il faut considérer que la poulie tourne autour de son centre I, que le frottement qui résiste au mouvement agit en B, et par conséquent avec un bras de levier B I, tandis que le poids additionnel, qui détruit les effets de ce frottement en faisant tourner la poulie, agit avec le bras de levier E I.

Appelons F le frottement, et W le poids additionnel, et nous aurons, d'après les propriétés du levier, établies dans notre second Traité de mécanique :

$$F : W :: EI : BI$$

$$\therefore F = W \frac{EI}{BI};$$

C'est à-dire que le frottement est égal au poids additionnel, qui produit le mouvement de la poulie, multiplié par le rayon de cette poulie, et divisé par le rayon du cylindre creux qui tourne sur le cylindre solide.

Il en résulte donc que le frottement est plus grand que le poids additionnel dans le rapport du rayon de la poulie, au rayon du cylindre solide.

Comme dans les expériences pour déterminer le frottement en roulant, on doit, à chacune d'elles, mettre le poids additionnel successivement dans chaque plateau, et prendre la moyenne des résultats, s'il y a quelque différence entre eux.

Pour reconnaître si ce frottement est une force uniformément retardatrice, on met, dans l'un des plateaux, un poids plus grand que celui qui serait nécessaire pour vaincre seulement le frottement, le plateau descend alors d'un mouvement accéléré; et, en plaçant auprès de lui, une échelle verticale graduée, on peut reconnaître quelle est la vitesse de cette accélération.

Si l'on trouve que les espaces que le plateau parcourt en une, deux, trois,

quatre, etc. secondes, sont entre eux comme les nombres 1, 4, 9, etc., ou, en d'autres termes, si les espaces parcourus sont comme les carrés des tems, le mouvement est uniformément accéléré.

En conséquence, on peut conclure de cette expérience, dans laquelle les résultats sont réellement ceux que nous venons de supposer, que ce frottement est une force uniformément retardatrice, et cela, exactement d'après les mêmes principes que ceux que nous avons développés aux numéros 9 et 10.

La corde employée dans ces expériences, comme dans celles décrites dans les autres chapitres, doit être tellement flexible que sa raideur ne puisse produire aucun effet sensible sur les résultats.

(20) Dans une série d'expériences faites d'après le principe que nous venons d'expliquer, Coulomb reconnut que cette espèce de frottement, comme toutes les autres modifications du frottement, est soumise à la loi de proportionnalité entre la pression et le frottement, demême qu'à l'exception plusieurs fois citée que, dans le cas d'une très-grande pression, le frottement est dans

un rapport un peu moindre que cette pression.

Il reconnut aussi que, comme dans le frottement en glissant, on obtient un grand avantage, si l'on graisse les surfaces. En général, le suif frais diminue le frottement de moitié. Il augmente à mesure que la matière onctueuse diminue. Ce dernier effet est, à la vérité, plus lent que dans le frottement du premier genre, ou en glissant.

Ce frottement est aussi une force uniformément retardatrice, et par conséquent, il est indépendant de la vitesse du mouvement.

Comme dans les deux autres espèces de frottement, la quantité de celui-ci dépend de la qualité des surfaces en contact. Si du fer tourne en contact avec du cuivre, le frottement équivaut à un septième de la pression; si les deux surfaces sont en bois, le frottement est un douzième de la pression.

En général, toutes les observations que nous avons faites sur le frottement du premier genre, ou en glissant, s'appliquent à la troisième espèce de frottement dont nous nous occupons dans ce chapitre.

(21) Le frottement des corps tournant sur des pivots semble appartenir à ce troisième genre de frottement. Il fut également l'objet des recherches de Coulomb qui a publié, à ce sujet, un Mémoire inséré dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1790. Nous en extrairons les résultats suivans :

Les corps qu'on fait tourner sur des pivots sont généralement suspendus, au moyen d'une chape et d'un collier de matière très-dure. La cavité du collier a une forme conique dont le sommet est terminé par un segment concave dont le rayon de courbure est très-petit ; la pointe du pivot qui est suspendue par ce collier, forme une petite surface convexe, dont le rayon de courbure est un peu plus petit que celui de l'extrémité du cône creux.

L'expérience démontre que la courbure du fond du cône creux est irrégulière, et que le frottement d'un collier d'agate dans lequel tourne un pivot, est fréquemment cinq ou six fois plus considérable, que le frottement d'un plan d'agate bien poli, sur lequel tournerait le même pivot.

Ces considérations engagèrent Cou-

lomb à se servir, dans le cours de ses expériences, mais d'un plan parfaitement poli pour soutenir le corps sur la pointe du pivot.

Pour empêcher le corps de glisser, il avait soin que son centre de gravité fût très-bas par rapport au point de suspension. Il faisait alors tourner le corps sur le pivot, en lui imprimant un mouvement de rotation; puis, au moyen d'une montre à secondes, il observait exactement le tems employé par le corps pour faire les quatre ou cinq premières révolutions, et en déduisait facilement une révolution moyenne, pour déterminer la vitesse primitive du mouvement; enfin, il comptait le nombre de révolutions que le corps faisait avant de s'arrêter.

Dans une de ces expériences, Coulomb se servait d'une cloche de verre de 48 lignes de diamètre, de 60 lignes de hauteur et du poids de 5 onces. Il la plaça sur la pointe d'un pivot, et, après lui avoir imprimé différens degrés de vitesse autour de ce pivot, il observa très-exactement le tems qu'elle employait à faire sa première révolution, ce qui lui donnait une vitesse moyenne

qui répondait à la moitié de cette première révolution.

Il comptait ensuite le nombre de révolutions que faisait la cloche avant de s'arrêter ; les résultats qu'il obtint , furent les suivans :

Première expérience. La cloche fit une révolution en quatre secondes , et s'arrêta après avoir fait $34 \frac{1}{10}$ révolutions.

Deuxième expérience. La cloche fit une révolution en six secondes un quart , et s'arrêta après avoir fait $14 \frac{1}{10}$ révolutions.

Troisième expérience. La cloche fit une révolution en 11 secondes , et s'arrêta après avoir fait $4 \frac{6}{10}$ révolutions.

[Maintenant , si nous désignons par b la vitesse initiale, par X l'espace parcouru entre le commencement et la fin du mouvement, par A le *momentum* con-

stante de la force retardatrice, par $f \frac{r^2}{a}$

la somme des produits de chaque molécule par le carré de la distance r à l'axe de rotation , divisée par la quantité a , qui désigne la distance de l'axe de rotation au point où la vitesse initiale

est b , il est facile de trouver l'expression analytique suivante, pour la valeur constante de la force retardatrice.

$$A = \frac{b^2}{2X} f \frac{r^2}{a}$$

Mais, comme dans les trois expériences rapportées ci-dessus, on a employé la même cloche de verre, la quantité $f \frac{r^2}{a}$

reste la même; $\frac{b^2}{X}$ doit donc être une quantité constante, si A est une quantité constante, et réciproquement.

Mais, dans chaque expérience, on a constaté le tems employé par la cloche pour faire une révolution entière. La vitesse moyenne, ou la vitesse du milieu de chaque première révolution, est par conséquent mesurée par la circonférence parcourue. L'espace parcouru jusqu'à la fin du mouvement, est mesuré par le nombre de révolutions faites depuis l'instant où la vitesse moyenne est déterminée, jusqu'à la fin du mouvement.

En calculant donc sur les données

fournies par ces trois expériences, nous pouvons former le tableau suivant :

Première expérience. La cloche fait une révolution en $4''$, s'arrête après $3\frac{4}{10}$ révolutions, le résultat est donc

$$\frac{b^2}{X} = \frac{1}{547}$$

Deuxième expérience. La cloche fait une révolution en $6\frac{1}{4}''$ s'arrête après $14\frac{1}{10}$ révolutions, le résultat est donc

$$\frac{b^2}{X} = \frac{1}{550}$$

Troisième expérience. La cloche fait une révolution en $11''$ s'arrête après $4\frac{6}{10}$ révolutions, le résultat est donc

$$\frac{b^2}{X} = \frac{1}{557}$$

Cette expérience démontre donc, sans la moindre équivoque, que la quantité

$\frac{b^2}{X}$ et, par conséquent, la quantité A

qui désigne le *momentum* du frottement, sont des quantités constantes, quel que soit le degré de vitesse initiale : donc la vitesse n'a aucune influence sur la résistance produite par le frottement sur

des pivots, qui, d'après ces mêmes expériences, est proportionnelle à une fonction de la pression.]

Lorsque ces expériences sont faites dans le vide, on peut employer un corps moins pesant et d'une forme quelconque; les résultats seront identiques.

Dans d'autres expériences, Coulomb courba une tringle de cuivre de 9 pouces de long; les branches parallèles étaient distantes l'une de l'autre de 24 lignes: la partie de la tringle, courbée en demi-cercle, qui joignait les deux branches avait 3 pouces de longueur, et ces deux branches avaient également 3 pouces de longueur.

A l'extrémité de chaque branche verticale était attachée, avec de la cire, une pièce de métal, et au milieu de la partie concave de la tringle, était fixé par le même moyen, un petit plan, parfaitement poli, d'une substance quelconque, qu'on pouvait ainsi remplacer successivement par d'autres plans, également bien polis, de différentes matières. Ces plans avaient pour destination de recevoir la pointe du pivot dont on voulait connaître le frottement. En faisant varier le poids des pièces de métal atta-

chées, avec de la cire, à l'extrémité des branches verticales, on faisait varier à volonté la pression sur le pivot.

Enfin, au sommet d'un support était adaptée une aiguille d'acier trempé qu'on pouvait également changer pour avoir une pointe plus ou moins aiguë, arrondie ou obtuse, suivant la nature du plan dont on voulait déterminer le frottement, et la pression qu'on exerçait sur le pivot.

La tringle recourbée était alors placée, les deux branches verticales pendantes, sur la pointe de l'aiguille qui supportait ainsi tout l'appareil, en frottant contre le petit plan.

La pointe de la première aiguille employée par Coulomb, lui parut, examinée au microscope, former un angle conique de 18 à 20 degrés. Il fit avec elle successivement des expériences sur des plans bien polis de grénat, d'agate, de cristal de roche, de verre et d'acier trempé; et, prenant pour chaque expérience la quantité moyenne représentée

par $\frac{b^2}{X}$ (quantité qu'il avait constatée

ne varier que dans des limites très-

étroites) il obtint, pour résultat, la valeur du frottement de la pointe d'aiguille contre les plans de grénat, d'agate, etc., etc., successivement. Le rapport qu'il reconnut entre les valeurs de ces divers frottemens, est représenté par le rapport entre les fractions

suivantes : $\frac{1}{1029}$, $\frac{1}{847}$, $\frac{1}{784}$, $\frac{1}{579}$,

$\frac{1}{487}$; de sorte que, si l'on représente, par

l'unité le frottement sur le plan de grénat, nous aurons, pour valeur du frottement de rotation spécifique des autres substances, les nombres suivans :

Frottement du grénat	1.000.
de l'agate	1.214.
du cristal de roche	1.313.
du verre	1.777.
de l'acier trempé	2.257.

Pendant ces expériences, Coulomb chercha à déterminer la forme plus ou moins aiguë qu'il convient de donner à la pointe des pivots. Il arrondit successivement des pointes d'aiguilles en cônes plus ou moins aigus, pour reconnaître si le changement de figure avait quelque influence sur le frottement.

Il constata, par exemple, que, sous une certaine pression, la pointe du pivot formant un angle de 45 degrés, la quantité $\frac{b^2}{X}$ était, pour le grénat, de

$\frac{1}{2500}$; pour l'agate, de $\frac{1}{2100}$; pour le

verre, de $\frac{1}{1400}$; pour l'acier trempé,

de $\frac{1}{2000}$.

Coulomb donna ensuite à la pointe de l'aiguille, une forme plus aiguë, l'angle du cône qui la terminait n'ayant pas plus de 6 à 7 degrés, et il constata qu'en conservant la pression des expériences précédentes, la quantité $\frac{b^2}{X}$

était, pour l'agate, $\frac{1}{800}$; pour le verre,

$\frac{1}{450}$; pour l'acier trempé, $\frac{1}{230}$.

Comparant, d'après ces expériences et quelques autres, la valeur du frottement de rotation d'un plan d'agate

contre la pointe de différens pivots , il constata que la quantité $\frac{1}{X}$, qui varie comme cette valeur , était pour une pointe dont l'angle avait 45 degrés , $\frac{1}{2100}$; pour une pointe de 15 degrés , $\frac{1}{1200}$; pour une pointe de 6 degrés , $\frac{1}{800}$.

Après ces expériences , Coulomb fit varier le poids des pièces métalliques adaptées aux deux branches verticales de la tringle courbe de cuivre , et déterminâ la valeur des frottemens des pivots sous différentes pressions .

Mais, sans entrer dans aucun détail sur cette nouvelle et nombreuse série d'expériences , nous allons indiquer ci-dessous les principes généraux qu'il en déduisit .

1°. Le frottement des pivots est indépendant de la vitesse , et est seulement proportionnel à une fonction de la pression .

2°. Le frottement des pivots sur le grénat, est moindre que sur le verre.

3°. La forme de la pointe des pivots, ainsi que sa plus ou moins grande finesse affecte ou modifie la quantité de frottement ; de sorte que, lorsqu'on fait tourner, sur la pointe d'une aiguille, un corps pesant plus de 5 ou 6 gros, l'angle le plus avantageux qu'on pourrait donner à cette pointe serait de 30 à 45 degrés. Sous une pression moindre, l'angle pourrait être proportionnellement diminué ou plus aigu, sans que le frottement augmentât sensiblement. On peut, sans inconvénient, réduire une pointe de bon acier à un angle de 10 ou 12 degrés, lorsque la pression n'excède pas 100 grains, considération importante, lorsqu'on a à suspendre des corps légers sur des pivots.

Ces principes peuvent être très-utiles aux horlogers.

CHAPITRE V.

DE LA RIGIDITÉ, OU DE LA RAIDEUR DES CORDES.

(22) EN examinant les effets et l'usage des cordes, dans notre second Traité, nous avons supposé que ces cordes étaient, dans tous les cas, parfaitement flexibles.

Toutes les fois qu'on fait des expériences sur une petite échelle, avec des poids légers et des tensions modérées; on peut employer des fils de soie, ou même de la ficelle très-fine, sans avoir égard à leur raideur, parce que, dans ce cas, leur flexibilité est trop grande pour que leur raideur puisse produire un effet sensible.

Mais, dans beaucoup de circonstances qui se rencontrent dans la pratique,

lorsqu'on a de grandes résistances à vaincre ou des poids considérables à élever , on emploie des cordes dont l'épaisseur et la force produisent une très-grande raideur ; et , si nous voulons connaître la puissance réelle et pratique de la machine que nous employons , il est nécessaire que nous puissions déterminer les effets produits par la raideur des cordes dont on fait usage.

Bien que la théorie de la rigidité des cordes soit beaucoup plus satisfaisante et plus conforme aux résultats de l'expérience que tout ce qu'on a imaginé sur le frottement , il est beaucoup plus difficile de l'expliquer , d'une manière à la fois simple , claire et populaire.

La raideur d'une corde dépend d'éléments qui la déterminent d'une manière très-facile à expliquer aux personnes familières avec les éléments de l'algèbre , mais qu'on ne peut rendre que très-difficilement en langage ordinaire.

Pour donner une idée à nos lecteurs de la manière dont la raideur d'une corde met obstacle à l'action d'une machine , nous supposerons que des poids égaux A et B , *fig. 5 , pl. I-II* , sont attachés aux deux extrémités d'une corde

A C D B, passant sur une poulie fixe O.

En augmentant un peu le poids A, on ferait tourner la poulie dans la direction D K C.

Cette partie de la corde qui a été appliquée sur le demi-cercle D K C, a, en raison de sa raideur, une tendance à conserver la forme courbée, et à résister, plus ou moins, à un effort quelconque; qui tendrait à lui faire quitter cette forme.

Supposons qu'elle conserve, en effet, cette forme pendant un petit mouvement de la poulie; la portion D K C de la corde, continuera à rester appliquée à la poulie, mais les points C et D auront pris les positions C' et D'.

Par la même raison que la portion D K C de la corde, tend à conserver la forme courbée, les portions D B et C A de cette même corde, tendent à conserver leur forme rectiligne ou en ligne droite, ainsi que *leurs positions, par rapport à la portion D C K.*

Supposons encore que, pendant le petit mouvement dont nous avons parlé, ces trois portions de la corde conservent à-la-fois leur forme et leur position relative, et que, par conséquent, à la fin de

ce mouvement, la corde et les poids aient pris la position $A' C' D' B'$; position qu'ils prendraient en effet, si la corde était *parfaitement rigide*, et si son frottement sur la poulie était suffisant pour l'empêcher de glisser dans la gorge de cette poulie.

Dans cette position, le poids ajouté à A, au lieu d'agir contre le poids B avec un bras de levier, CO égal au sien, n'agit plus qu'avec le bras de levier EO , contre ce même poids B qui lui résiste avec un bras de levier augmente FO (les lignes $A'E$ et $B'F$ étant perpendiculaires à la ligne CD et à son prolongement).

Il résulte donc, de ce que nous venons de dire, que, si la corde était *parfaitement rigide*, une puissance quelconque, qui aurait commencé à faire tourner la poulie, placerait bientôt l'appareil dans une position telle que la résistance agissant sur un bras de levier qui augmenterait constamment, tandis que la puissance motrice agirait sur un bras de levier qui diminuerait de même, la machine se mettrait en équilibre et qu'il n'y aurait plus de mouvement de produit.

Maintenant, supposons, ce qui est généralement vrai, que la corde, sans être absolument et parfaitement rigide, a un certain degré de raideur: si l'on fait tourner un peu la poulie, comme dans l'expérience précédente, les poids A' et B' agissant sur des portions de corde $A' C C'$ et $B' D'$ dont la flexibilité n'est pas parfaite, leur feront prendre la forme de courbes, comme le représente la *fig. 6*, *pl. I-II*.

Des points A' et B' , comme dans l'exemple précédent, tirons les lignes perpendiculaires $A' E$ et $B' F$, et nous reconnaitrons qu'il est évident que le poids ajouté à A' agit avec un bras de levier diminué $E O$, tandis que le poids B' agit avec un bras de levier augmenté $F O$. Si le poids ajouté à A' et multiplié par le bras de levier $E O$, n'est pas plus grand que le poids B' multiplié par le bras de levier $F O$, il ne produira aucun mouvement.

Une autre conséquence de ce fait, c'est qu'une poulie fixe peut être chargée de poids inégaux, et cependant conserver l'équilibre.

Si nous examinons les effets que les poids A' et B' produisent sur la corde

pendant que la poulie tourne, nous trouverons que ces effets sont très-différens entre eux.

Le poids B' courbe continuellement la portion de corde, de manière à lui faire prendre, en D , une courbure égale à celle de la gorge de la poulie. D'un autre côté, le poids A est employé à détruire cette courbure que la corde a prise sur la gorge de la poulie, et même à lui faire prendre une courbure dans une autre direction.

La tendance que la corde a, dans ce cas, à conserver la courbure en C , a pour résultat, de diminuer le bras de levier avec lequel le poids A' agit ; mais l'effet que produit le poids A' en donnant à la corde une autre courbure dans une direction opposée au-dessous de C' , diminue ce résultat et tend à augmenter le bras de levier avec lequel agit le poids A' . La différence entre ces deux effets est la mesure de la diminution du bras de levier de A' .

D'un autre côté, la résistance que la portion de corde $B'D$ oppose à la flexion, contrarie aussi l'effet de B , et cette résistance qui n'est contrebalancée par aucune autre cause, est entièrement em-

ployée à augmenter le bras de levier avec lequel agit le poids B' .

Il en résulte donc que l'augmentation DF du bras de levier, avec lequel agit le poids B' , est beaucoup plus grande que la diminution CE du bras de levier de A' .

Cet effet, qui est toujours le résultat de l'expérience, est d'une grande importance, en ce qu'il simplifie la théorie de la rigidité des cordes.

En effet, on reconnaît généralement que l'effet du poids A' sur la corde est si considérable, et que la diminution CE de son bras de levier, produite par la raideur de la corde, du côté C , est si peu de chose, qu'on peut la négliger entièrement, et, que dans nos recherches ultérieures, nous pouvons, sans erreur sensible, considérer le poids A' comme agissant à l'extrémité du bras de levier OC ou du rayon de la poulie.

Au contraire, et d'après les raisons que nous venons d'exposer, l'augmentation DF , du bras de levier de B' , produite par la raideur de la corde DB' est considérable, et forme un élément important dans la détermination des effets de la rigidité.

Maintenant, si nous désignons par x le poids qu'il faut ajouter à A' pour que la poulie commence à se mouvoir, nous aurons, d'après les principes de la théorie du levier, que nous avons établis dans notre second Traité :

$$(x + A') r = B' (r + b),$$

équation dans laquelle r désigne le rayon de la poulie, et $b = DF$.

Par conséquent :

$$x r + A' r = B' r + B' b.$$

Mais, puisque

$$A' = B', A' r = B' r,$$

éliminant ces deux quantités égales des deux membres de l'équation, nous trouvons :

$$x r = B' b$$

$$\therefore x = B' \frac{b}{r}.$$

Ainsi, si b est connu, l'effet de la rigidité, correspondant à un poids ou à une pression donnée, sera aussi connu.

Il en résulte également que, pour déterminer l'effet de la rigidité des cordes, dans une machine quelconque, il est

seulement nécessaire de supposer que le bras de levier, avec lequel agit la résistance, est plus grand, qu'il ne l'est en effet, d'une certaine quantité.

Pour compléter la théorie de la rigidité des cordes, il est nécessaire que nous donnions les moyens de déterminer cette quantité b . Mais cette explication nous forcera à faire usage de principes et de signes algébriques, avec lesquels la plupart de nos lecteurs ne sont pas familiers. Ils acquerront très-facilement cette connaissance importante, en étudiant avec soin le *Traité d'Arithmétique et d'Algèbre* qui fait partie de cette Collection.

La quantité b dépend évidemment et entièrement de la courbure de la corde $B'D'$, *fig. 6*, et il est facile de déterminer les élémens dont cette courbure dépend.

Ces élémens sont :

1°. La tension de la corde ou le poids B' qui détermine cette tension; appelons w ce poids ou cette tension.

2°. Les matières mêmes qui composent la corde, et la manière dont celle-ci a été confectionnée; appelons a la quan-

tité dont ces deux élémens affectent ou modifient la raideur de la corde.

3°. Le diamètre de la corde , que nous appellerons d .

4°. Enfin le rayon de la poulie que nous désignerons par r .

Dans ce cas , la formule empirique (*).

$$x = \frac{d}{r} (a + m w)$$

représente la valeur de x ; les lettres m et n représentent des nombres indéterminés , dont les valeurs , aussi bien que celle de a ne peuvent être trouvées que par l'expérience.

Pour déterminer ces valeurs , supposons qu'on ait quatre poulies dont les rayons soient r , r , r' et r'' ; qu'on place successivement , sur ces poulies , la corde dont on veut connaître la raideur ; qu'on tende cette corde , avec des poids égaux , w , w' , w'' et w''' ; et qu'enfin les poids

(*) On appelle en algèbre , *formule empirique* , une formule imaginée ou conçue sans démonstration analytique , et dont la vérité , ou seulement la probabilité , ne s'établit qu'en montrant qu'elle est vérifiée par l'expérience.

nécessaires pour faire commencer le mouvement de ces poulies soient représentés par x , x' , x'' et x''' .

Si l'on substitue ces valeurs à celles de la formule citée plus haut, on obtiendra :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{d^n}{r} (a + m w) \\ x' &= \frac{d^n}{r'} (a + m w') \\ x'' &= \frac{d^n}{r''} (a + m w'') \\ x''' &= \frac{d^n}{r'''} (a + m w''') \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

De trois quelconques de ces quatre équations, on peut déduire les valeurs de a , de m et de n . Ces valeurs étant connues on a

$$x = w \cdot \frac{b}{r}$$

$$\dots b = \frac{x}{w} \cdot r;$$

$$\text{d'où } b = \frac{d^n}{w} (a + m w).$$

Par là on peut déterminer l'augmentation du bras de levier qu'il est nécessaire d'allouer à la résistance, lorsque le diamètre de la corde et sa tension sont connus.

Pour vérifier la formule empirique, ci-dessus mentionnée, ou pour en prouver la vérité autant qu'il est possible de le faire, il suffit d'éliminer les quantités a , m et n dans les quatre équations (A); et, si le résultat est une identité, c'est-à-dire une équation dont les membres sont exactement les mêmes, les quatre équations sont d'accord.

On peut fortifier cette espèce de preuve, en multipliant les expériences, et en employant différentes valeurs de x , de w , et de r : et si on élimine les valeurs a , m et n de chaque combinaison des quatre équations, la certitude de la preuve sera égale à celle d'une démonstration.]

CHAPITRE VI.

DES MODIFICATIONS QUE LE FROTTEMENT ET D'AUTRES RÉSISTANCES APPORTENT DANS LES CONDITIONS D'ÉQUILIBRE.

(23) DANS une machine que l'on suppose exempte de frottement, et indépendante de toute autre force résistante, une certaine puissance déterminée ferait équilibre à un poids ou à une résistance donnée, et nous avons expliqué, dans notre second Traité, les méthodes à employer pour déterminer leurs rapports.

Une puissance plus grande que celle nécessaire pour faire équilibre au poids ferait monter celui-ci ; et, si elle était moindre, elle lui permettrait de descendre. Dans ces deux cas, l'équilibre serait détruit.

Ce principe n'est plus rigoureusement applicable lorsque, comme cela arrive toujours en réalité, la machine est soumise aux effets du frottement, de la rigidité, et d'autres forces résistantes, et il faut trouver une puissance qui, entre deux limites déterminées, puisse produire l'équilibre.

Cette circonstance est le résultat de la nature particulière des forces passives ou résistantes qui, dans quelque direction qu'ait lieu le mouvement ou la tendance au mouvement, prennent toujours une direction opposée à ce mouvement ou à cette tendance.

Si, par exemple, la puissance a une tendance à faire monter le poids, parce qu'elle se trouve plus grande qu'il ne serait nécessaire pour établir l'équilibre, d'après les principes exposés dans notre second Traité, le frottement, la raideur des cordes, etc., s'opposent à cette tendance. Si, au contraire, le poids se trouve augmenté de manière à être plus grand que la puissance, et à tendre à faire monter celle-ci; les forces résistantes changent immédiatement de direction, et s'opposent aux effets du poids.

Appelons P la puissance qui, au moyen

d'une machine quelconque, ferait équilibre à un poids ou à une résistance W , indépendamment du frottement ou d'autres forces résistantes, enfin, d'après les principes mécaniques établis dans notre second Traité.

Si l'on augmente P , il aura une tendance à faire monter W ; mais les forces résistantes s'opposeront à cette tendance; appelons R l'effet de ces résistances sur P , et nous reconnaitrons évidemment qu'il faudra augmenter P d'une quantité plus grande que R , pour que P puisse faire monter W .

Au contraire, si l'on diminue P , W aura une tendance à descendre, et, par conséquent, à faire monter P ; mais les forces résistantes s'opposeront à cette tendance, et W ne pourra descendre, à moins que P ne soit diminué d'une quantité plus grande que R .

Il résulte donc, de cet exposé, que, pour faire monter le poids, la puissance doit être plus grande que $P + R$, et que, pour empêcher la descente du poids, la puissance ne doit pas être moindre que $P - R$.

Par conséquent une puissance quelconque dont la valeur serait entre les li-

mites $P + R$ et $P - R$, ferait équilibre au poids ou à la résistance.

Les puissances $P + R$ et $P - R$, feraient également équilibre au poids ou à la résistance; mais elles seraient dans un état d'*équilibre instable*, puisque la moindre augmentation de l'un ou la moindre diminution de l'autre, produirait l'élévation ou la descente du poids.

L'augmentation R de la puissance qui fait équilibre aux forces résistantes, ne doit pas être nécessairement égale à ces mêmes forces, parce que cette augmentation R agit généralement sur les résistances par l'intermédiaire de la machine, ou d'une partie de cette machine.

L'explication des méthodes au moyen desquelles on peut déterminer cette quantité R , même dans les machines les plus simples, exigerait plus de démonstrations mathématiques, que ne le comporte la nature de notre *Traité*. Nous exposerons néanmoins quelques-uns des cas les plus simples.

(24) Si un levier repose sur un point d'appui en forme de lame de couteau, le frottement sera imperceptible; mais il n'en sera pas ainsi s'il tourne sur un axe cylindrique.

Soit f , la quantité absolue de frottement sur cet axe, déterminée d'après les principes que nous avons exposés dans les chapitres précédens ; soient r le rayon de cet axe, W le poids ou la résistance, w le bras de levier de la résistance, et p le bras de levier de la puissance.

Pour faire monter le poids, la puissance aura à vaincre le frottement agissant avec un bras de levier r , et le poids W agissant avec un bras de levier w . Le *momentum* de la puissance qui ferait exactement équilibre à ces deux forces serait donc représenté par $W \times w + f \times r$.

Appelons P' cette puissance, et nous aurons

$$P' \times p = W \times w + f \times r$$

$$\therefore P' = \frac{W \times w + f \times r}{p}$$

Cette puissance ferait exactement équilibre au poids et au frottement, et la moindre addition qu'elle recevrait, ferait monter le poids.

Si, au contraire, nous supposons que c'est le poids qui descende, il éprouvera une résistance de la part du frottement f , agissant avec le bras de levier r , et

dont l'effet s'ajoutera par conséquent à celui de la puissance; appelons P'' , la puissance qui, dans ce cas, ferait exactement équilibre au poids, et serait justement suffisante pour empêcher sa descente: nous aurons évidemment

$$P'' \times p = W \times w - f \times r$$

$$\therefore P'' = \frac{W \times w - f \times r}{p}$$

Une puissance moindre que P'' permettrait au poids de descendre. Enfin, ces deux puissances P' et P'' , et toutes les puissances intermédiaires feraient équilibre au poids.

Puisque P , qui fait équilibre à W , lorsqu'il n'y a pas de frottement, est égal à $\frac{W \times w}{p}$, nous avons

$$P' = P + \frac{f \times r}{p} = P + R :$$

$$\therefore R = \frac{f \times r}{p}$$

qui est la limite de l'augmentation ou de la diminution que peut éprouver la

puissance, sans que l'équilibre soit détruit.

Ces considérations s'appliquent évidemment au treuil; mais, dans ce cas, on doit aussi tenir compte de la raideur de la corde, conformément aux principes établis dans le chapitre précédent; enfin, il en serait de même pour la poulie.

(25) Soit un corps W , *fig. 7, pl. I-II*, placé sur un plan horizontal; et soit f le rapport entre le frottement et la pression de ce corps sur le plan. Si une force quelconque le tire dans la direction $W A$, parallèle au plan, et est exactement celle nécessaire pour mettre ce corps en mouvement, cette force sera, par conséquent, égale au frottement, et sera représentée par $W \times f$.

Maintenant, supposons que ce même corps W soit tiré le long du plan; par une force qui agirait constamment dans la direction $W B$, formant, avec le plan horizontal, le même angle $W B A$; cette force produira un double effet, ainsi que nous allons le démontrer.

Tirons les lignes $B C$ et $B D$, de manière à former le parallélogramme $W D B C$; la force $W B$ est équivalente à deux

forces, représentées, en grandeur et en direction, par les côtés $W D$ et $W C$. La force $W D$ tend à élever le corps W au-dessus du plan, et par conséquent à diminuer sa pression et son frottement; tandis que la force $W C$ tend à le faire mouvoir le long du plan.

Par l'obliquité de cette traction, il y a de l'avantage de gagné et de perdu. On gagne de l'avantage, parce que le frottement à vaincre est diminué par l'effet de l'élément $W D$ de la traction, qui, agissant de bas en haut, diminue la pression sur le plan.

On perd de l'avantage, parce que l'élément $W C$ de la traction, qui fait avancer le corps sur le plan est moindre que la traction entière $W B$ qui aurait toute son efficacité, si elle agissait parallèlement au plan.

On a constaté néanmoins que, pourvu que l'angle ($W B C$) de la traction n'excède pas une certaine limite, on gagne au total quelque chose dans une traction oblique, c'est-à-dire qu'il faut une moindre force pour mettre le corps en mouvement, et continuer ce mouvement, qu'il ne serait nécessaire, si la traction était parallèle au plan.

C'est donc un problème très-important à résoudre que de déterminer quel est l'angle de traction qui produit le plus grand avantage, ou avec lequel la puissance qui fait mouvoir le corps le long du plan, est la plus petite possible.

Ce problème serait facilement résolu au moyen de l'algèbre; nous essaierons néanmoins de le résoudre par une construction géométrique, parce que ce procédé est plus élémentaire, quoique moins expéditif.

Supposons que la force de traction, déjà expliquée, soit représentée, en grandeur et en direction, par la ligne $W B$, *fig. 8 pl. I-II*, et qu'enfin, elle soit juste suffisante pour mettre le corps en mouvement. L'élément $W C$ de cette force, sera alors égal au frottement.

Supposons que la ligne $W A$ représente la quantité de frottement qu'aurait produit tout le poids du corps pesant sur le plan, ou si l'on veut la quantité $f W$ que nous avons représentée ainsi, en nous occupant de la *fig. 7*.

Puisque $W C$, représente la quantité de frottement qui reste après que la pression a été diminuée par l'élément

W D de la traction, il en résulte que C A doit représenter la quantité de frottement produite par la pression D W ou B C; et, puisque f exprime le rapport général entre le frottement et la pression, nous avons :

$$C A : C B :: f : 1.$$

On se rappelle que nous avons déjà démontré au numéro 9, que, si on élevait ou inclinait le plan W A, jusqu'à ce que le corps W commençât à glisser, le rapport entre la hauteur de ce plan, et sa base serait le même que celui du frottement à la pression.

Dans le cas actuel, la hauteur du plan aurait, avec sa base, le même rapport que la ligne C A, a avec la ligne C B.

Par conséquent le triangle rectangle compris entre la base et la hauteur du plan est semblable au triangle A C D, et l'angle A B C est égal à l'élévation du plan qui déterminerait le mouvement du corps.

L'angle B A C est le complément de cet angle; or, puisque la ligne W A représente le frottement entier du corps, non diminué par l'obliquité de la trac-

tion, et puisque l'angle $B A W$, dépend du rapport entre le frottement et la pression, ces quantités sont toutes deux indépendantes de la direction ou de la longueur de la ligne $W B$, qui représente la force de traction, et restent par conséquent les mêmes, lorsque la force de traction change, soit en grandeur, soit en direction.

Nous avons donc ainsi une construction géométrique très-élégante, au moyen de laquelle on peut déterminer la force, rigoureusement suffisante pour mettre le corps en mouvement, dans une direction faisant un angle quelconque avec un plan horizontal.

En effet, d'un point W , pris, à volonté, sur le plan horizontal, tirons la ligne perpendiculaire $W M$; puis sur cette perpendiculaire, et sur le plan, prenons deux longueurs $W M$ et $W A$, qui aient entre elles le même rapport que celui qui existe entre le frottement du corps et sa pression sur le même plan, de sorte que :

$$W M : W A :: f : 1.$$

Maintenant, si nous supposons que la ligne $W M$ représente le poids, la ligne

$W A$ représentera le frottement produit par la pression de ce poids tout entier, et l'angle $W M A$ sera égal à une élévation du plan, suffisante pour que la force qui entraîne le corps de haut en bas, soit égale au frottement.

Nous supposerons encore que la longueur $W M$ contient un nombre de pouces égal au nombre de livres du poids.

Dans ce cas, le nombre de pouces contenu dans la ligne $W A$ représente le nombre de livres que vaincrait le frottement produit par le poids entier, ou qui, agissant parallèlement au plan horizontal $W A$, serait exactement suffisant pour mettre le poids en mouvement.

Maintenant, il s'agit de déterminer la puissance qui, agissant dans une direction qui ferait un angle donné avec le plan horizontal $W A$, serait juste suffisante pour mettre le poids en mouvement.

Tirons la ligne $W B''$ dans la direction qu'on veut donner à la puissance, et qui se termine à son intersection avec la ligne $A M$; le nombre de pouces, contenu dans cette ligne $W B''$, représentera le nombre de livres qui, agissant dans la direction $W B''$, serait juste suffisant pour mettre le poids en mouvement.

D'un autre côté, il est également nécessaire de pouvoir déterminer la direction dans laquelle une puissance donnée devrait agir pour être exactement suffisante pour déterminer le mouvement du poids W .

Pour résoudre ce problème, prenons une ligne $W B'$, contenant autant de pouces que la puissance donnée contient de livres, et appliquant l'une des extrémités de cette ligne sur le point W , faisons-la tourner autour de ce point comme centre. Le point où l'autre extrémité de la ligne $W B'$ touchera la ligne $A M$ déterminera la direction que devra avoir la puissance donnée.

Pour déterminer le meilleur angle de traction, il suffit donc de prendre la ligne la plus courte qu'on puisse tirer du point W sur la ligne $A M$; et l'on sait qu'une telle ligne ne peut être qu'une perpendiculaire à $A M$. Supposons que $W B A$, soit un angle droit, l'angle $B W A$ est, par conséquent, le meilleur angle de traction.

Les triangles rectangles $W B A$ et $B C A$ sont semblables; et, par conséquent l'angle $B W A$ est égal à l'angle $C B A$:

or, ce dernier est égal à l'angle que devrait faire le plan incliné avec sa base, pour que le corps commençât à se mettre de lui-même un mouvement.

(26) Nous pouvons obtenir ce résultat au moyen de l'algèbre par la méthode suivante.

Appelons x l'angle de traction; P la puissance, et X l'élévation que devrait avoir le plan incliné, pour que le corps commençât de lui-même à se mettre en mouvement le long de ce plan.

Les élémens dont se compose P , sont $P \cos. x$ et $P \sin. x$; la pression sur le plan est conséquemment $W - P \sin x$, et le frottement qui en résulte ($W - P \sin. x, \text{tang. } X$) qui fait équilibre à $P \cos. x$. Par conséquent nous avons :

$$(W - P \sin, x) \tan. X = P \cos. x.$$

Il s'agit donc maintenant de déterminer la valeur de x qui rend P un *maximum*.

Différenciant et considérant P et x comme variables, nous avons :

$$-P \cos. x \text{ tang. } X \, dx - \sin. x \text{ tang. } X \, dP = \cos. x \, dP - P \sin. x \, dx.$$

Supposons que $dP = 0$, et omettons dx , nous obtiendrons

$$-P \cos. x \text{ tang. } X = -P \sin. x$$

$$\therefore \text{Tang. } X = \text{tang. } x.$$

$$\therefore x = X,$$

Conclusion identique avec celle que nous avons obtenue plus haut, au moyen de la construction géométrique.]

(27) Il résulte donc de tout ce que nous venons d'exposer, que, si l'on a besoin de tirer un corps quelconque sur un plan qui doit produire du frottement, la meilleure direction à donner à la force de traction, serait celle qui ferait, avec le plan, le même angle que celui-ci devrait faire avec le plan horizontal, pour déterminer le corps à se mettre de lui-même en mouvement, sans l'emploi d'aucune force motrice.

Dans la construction géométrique, employée plus haut, l'angle de traction, correspondant à la direction WM , est de 90 degrés.

Dans ce cas, toute la force de traction est employée à diminuer la pression sur

le plan, l'élément de cette force, qui est dans la direction du plan, diminuant dans le même rapport que l'angle de traction augmente, et finissant enfin par disparaître; la ligne WM doit donc représenter, comme nous l'avons déjà dit, le poids du corps, la pression se trouvant, dans ce cas, absolument détruite.

(28) Dans nos recherches précédentes sur le meilleur angle de traction, nous avons supposé que le plan sur lequel le corps pesant est traîné, est horizontal. Mais s'il ne l'est pas, s'il est au contraire incliné, le procédé d'investigation sera quelque peu modifié, mais le résultat final sera le même: car le meilleur angle de traction est, dans tous les cas, égal à l'élévation du plan, nécessaire pour que le corps commence de lui-même à se mettre en mouvement, sans le secours d'aucune force motrice.

Soit FI , *fig. 9, pl. I-II*, le plan incliné sur lequel le corps est placé. Supposons que sa longueur FI , exprimée en pouces, représente le poids du corps exprimé en livres. Alors sa base FK représentera la pression, et sa hauteur KI la

force avec laquelle le corps tend à descendre le long du plan. (*Voyez le second Traité.*)

Maintenant, tirons la ligne $W M$, perpendiculaire à $F I$ et égale à $F K$, puis la ligne $M A$, faisant l'angle $W M A$, égal à l'angle d'élévation que devrait avoir le plan pour permettre au corps de descendre de lui-même, ou pour rendre sa tendance à descendre, égale au frottement.

D'après les principes établis plus haut, $M W$ est à $W A$, comme la pression est au frottement. Mais $W M$ représente la pression sur le plan, et, par conséquent, $W A$ représente le frottement correspondant.

Soit $W D$, l'élément de la force de traction perpendiculaire au plan, et qui, par conséquent, diminue la pression. Puisque $W M$ représente la pression toute entière, et $W D$ la quantité dont la force de traction diminue cette pression, la pression réelle est représentée par $M D$.

Du point D , tirons la ligne $D L$, parallèle à $W A$, les triangles $M D L$ et $M W A$ seront semblables, et, par conséquent,

$$M W : W A :: M D : D L.$$

Mais, puisque $W A$ représente le frottement correspondant à la pression, représentée par $M W$, $D L$ doit représenter le frottement correspondant à la pression effective, représentée par $M D$. C'est une partie de la force résistante que doit surmonter l'élément de la force de traction qui est parallèle au plan. L'autre partie est la tendance du corps à descendre le long du plan incliné; elle est représentée par la hauteur $K I$ de ce même plan.

Du point A , prenons une longueur $A O$, égale à $K I$, puis tirons la ligne $O B$, parallèle à $A M$, et, touchant la ligne $D L$, prolongée jusqu'en B ; il en résultera un parallélogramme $A L B O$, dont le côté $A O$, est égal au côté opposé $L B$; par conséquent, la ligne $L B$, représente la tendance du corps à descendre le long du plan. Cette force ou cette tendance, ajoutée à la ligne $D L$, qui représente le frottement, représente toute la force de résistance que doit vaincre l'élément de la force de traction qui est parallèle au plan incliné.

En conséquence, si nous tirons la ligne $W B$, puis la ligne $B C$, parallèle à la ligne $D W$, il est évident que $W B$

doit représenter la force de traction tout entière , puisque $W C$ (qui est égal à $D B$) et $W D$, sont les élémens de cette force , l'un dans la direction même du plan , et l'autre perpendiculaire à cette direction.

Dans cette démonstration , nous avons encore supposé que le nombre de pouces que contiennent les différentes lignes que nous avons tracées , est égal au nombre de livres déterminé par les forces ou les pressions que ces lignes représentent.

(29) Telle est l'analyse du problème à résoudre , lorsque le plan est incliné. Il en résulte qu'on peut trouver une force de traction , correspondante à un angle de traction quelconque , en tirant du point W une ligne dans la direction de la traction , et qui se termine à la ligne $D B$, ou à son prolongement. La longueur de cette ligne représentera la force de traction nécessaire.

Si , d'un autre côté , on a besoin de chercher quel est l'angle de traction correspondant à une force donnée , il suffira de faire tourner , autour du point W , comme centre , une ligne égale à la force de traction donnée ,

jusqu'à ce que son autre extrémité rencontre la ligne $O B$, et la direction de cette ligne sera celle qu'il conviendra de donner à la force de traction.

Pour trouver le meilleur angle de traction, il suffit de trouver la force, la moins grande possible, qui sera évidemment donnée par une perpendiculaire $W B$, tirée du point W sur la ligne $O B$; cette ligne sera la plus courte qu'on puisse tirer du point W à la ligne $O B$.

D'un autre côté, puisque les triangles $W B C$ et $B C O$ sont semblables, l'angle $B W O$ est égal à l'angle $C B O$; et, puisque $B C$ est parallèle à $W M$, et $B O$ à $M A$, l'angle $C B O$ est égal à $W M A$. Par conséquent, l'angle $B W O$ est égal à $W M A$. Or, ce dernier angle est égal à l'élévation que devrait avoir le plan incliné, pour que le corps se mette de lui-même en mouvement le long du plan, sans le secours d'aucune force motrice.

(30) On peut obtenir les mêmes résultats, au moyen de l'algèbre, par la méthode suivante :

[Soit e , l'élévation du plan incliné ;

la tendance du corps à descendre le long de ce plan, sera $W \sin. e$, et la pression sera $W \cos. e$. Le frottement résultant de cette pression est donc :

$$W \cos. e \text{ tang. } X.$$

L'élément de la force de traction, perpendiculaire au plan, est :

$$P \sin. x.$$

Et la diminution de frottement qui en résulte, est :

$$P \sin. x \text{ tang. } X.$$

Par conséquent, le frottement total, est :

$$(W \cos. e. - P \sin. x) \text{ tang. } X;$$

et la résistance totale à vaincre par l'élément $P \cos. x$ de la force de traction dans la direction du plan, est la somme de ce frottement, plus la force $W \sin. e$ ou la tendance du corps à descendre le long du plan.

Par conséquent, nous avons l'équation :

$$W \sin. e + (W \cos. e. - P \sin. x) \text{ tang. } X \\ = P \cos. x.$$

Considérant P et x , comme variable, différencions cette équation, et nous obtiendrons :

$$-P \cos. x \text{ tang. } X \, d x. - \sin. x \text{ tang. } X \, d P. = \cos. x \, d P - P \sin. X \, d x.$$

C'est la même équation différentielle que nous avons obtenue au numéro 26; et par conséquent, elle donne le même résultat :

$$x = X.]$$

(31) Nous allons maintenant rechercher les limites de la valeur d'une puissance capable de soutenir, en équilibre, un poids donné, sur un plan incliné, soumis aux effets du frottement. Nous supposerons d'abord que cette puissance agit dans la direction du plan.

Si l'élévation du plan n'est pas plus grande que celle nécessaire pour que le corps se mette de lui-même en mouvement, élévation que nous désignerons par la lettre X , il est évident que la puissance, nécessaire pour maintenir le corps en équilibre, n'a pas de *moindre limite*, puisque, sans le

secours d'aucune puissance, le frottement suffit pour empêcher la descente du corps.

Si le poids de ce corps est représenté par la longueur du plan, la pression sera elle-même représentée par la base B du même plan.

Désignons, comme nous l'avons déjà fait, le rapport du frottement à la pression, par $f:1$; $B \times f$ représentera le frottement; enfin, la tendance du corps à descendre le long du plan incliné sera représentée par la hauteur H du plan.

La résistance à vaincre par la puissance pour commencer à mettre le corps en mouvement, est donc :

$$H + B \times f,$$

qui est par conséquent la *plus grande limite* de la puissance qui serait capable de maintenir le corps en équilibre. Toute autre puissance plus grande que celle-ci, entraînerait le corps, et lui ferait monter le plan incliné.

C'est ce qu'on peut facilement démontrer au moyen d'une construction géométrique.

Soit AB, *fig. 10, pl. I-II*, la lon-

gueur du plan incliné qui représente le poids du corps ; A C représentera la pression , et B C la tendance du corps à descendre le long du plan.

Sur la longueur A B , prenons la longueur A D , égale à la hauteur B C du plan ; du point D , tirons la ligne D E , perpendiculaire au plan , et égale à sa base A C ; enfin , du point E , tirons la ligne E F , faisant l'angle D E F , égal à l'angle X , qu'on se rappelle représenter l'angle que devrait faire le plan incliné pour que le corps se mît de lui-même en mouvement. Nous aurons donc :

$$D \quad E :: f : 1 ,$$

c'est-à-dire , comme le frottement est à la pression ; car , puisque D E représente la pression , D F représente le frottement.

Enfin , puisque A D , représente la tendance du corps à descendre le long du plan incliné , et que D F représente le frottement , A F représente une force égale aux effets combinés de ces deux forces , et , par conséquent , la puissance qui les tient en équilibre.

Toute autre puissance , plus grande

que $A F$ entraînerait donc le corps, et lui ferait monter le plan incliné. Donc, enfin, $A F$ représente la plus grande puissance qui puisse agir sur le corps, sans détruire l'équilibre.

Si nous supposons que l'élévation $B A C$ du plan incliné est plus grande que l'angle X , la puissance nécessaire pour maintenir le corps en équilibre, aura une *moindre limite* : car, dans ce cas, le frottement seul est insuffisant pour empêcher la descente du corps.

D'après les principes exposés précédemment, la hauteur H du plan, représente la tendance du corps à descendre, et $B \times f$, le frottement qui s'oppose à la descente du corps.

Donc la tendance actuelle du corps à descendre le long du plan est :

$$H - B \times f.$$

qui est par conséquent la *moindre limite* de la puissance.

Si nous désignons, comme au numéro 24, par P' la puissance qui ferait équilibre au poids et au frottement du corps, et par P'' celle qui empêcherait le corps

de descendre le long du plan incliné, nous aurons par conséquent :

$$P' = H + B \times f.$$

$$P'' = H - B \times f.$$

ou bien, dans la construction géométrique de la *fig.* 10, tirons la ligne EF' , faisant l'angle DEF' , égal à l'angle X ; et DF' représentera le frottement. Par conséquent, nous aurons :

$$P' = AF,$$

$$P'' = AF'.$$

(32) Supposons maintenant que la direction de la puissance fait un angle avec le plan incliné.

Nous avons déterminé, au moyen de l'algèbre, et par une construction géométrique, au numéro 28, la puissance qui, agissant dans une direction qui ferait un angle donné avec le plan incliné, serait juste suffisante pour faire équilibre au poids du corps et au frottement.

Par conséquent, si FI , *fig.* 9, représente le poids du corps, et WB la direction de la puissance, la longueur de la

ligne $W B$ exprimera la grandeur de la puissance qui serait juste suffisante pour vaincre le poids du corps et le frottement ; de sorte qu'un pouvoir quelconque plus grand que $W B$, agissant dans cette direction, entraînerait le poids, et lui ferait monter le plan incliné. Par conséquent, $P' = W B$.

Il serait facile de déterminer la moindre limite de la puissance, par une légère modification de la construction géométrique.

Dans la méthode décrite au numéro 28, au lieu de faire l'angle $W M A$, égal à X , vers le sommet I du plan incliné, faisons-le, comme dans la *fig. 11, pl. I-II* vers le pied F de ce même plan.

Alors, comme auparavant, la ligne $W D$, représentant l'élément de la force de traction perpendiculaire au plan, la ligne $D L$ représentera le frottement.

Prenons maintenant $A O$, égal à $I K$; et, du point O , tirons la ligne $O B$, parallèle à la ligne $A M$, et rencontrant la ligne $L D$, prolongée jusqu'en B .

La force avec laquelle le corps tend à descendre le long du plan, est la

différence entre la portion ou l'élément LB du poids du corps, et le frottement LD . Cette différence est DB .

Cette ligne DB doit donc être égale à l'élément de la puissance dans la direction du plan ; et puisque WD est l'élément perpendiculaire au plan, la puissance doit être WB .

(33) Ecartant de la construction ces lignes que nous n'y avons introduites que pour suppléer à l'enchaînement du raisonnement algébrique, on pourra déterminer, par la méthode suivante, les deux limites de la puissance.

Soit WB *fig. 12, pl. I-II*, la direction de la puissance ; prenons les longueurs WA et WA' égales chacune au frottement résultant de la pression du corps sur le plan, le corps n'étant supposé soumis à l'influence d'aucune force motrice ; prenons aussi les longueurs AO et $A'O'$, égales chacune à IK ; puis, des points OO' , tirons deux lignes inclinées chacune sur OO' et formant deux angles égaux chacun au complément de l'angle X ; enfin prolongeons la direction de la puissance de manière qu'elle coupe ces lignes en B' et en B .

Dans ce cas, la ligne $W' B'$ représentera la *moindre puissance* capable d'empêcher le corps de descendre, et $W B$ la plus grande puissance capable de retenir le corps sans lui faire monter le plan. Toute puissance intermédiaire produirait l'équilibre.

La construction que nous avons donnée ne donne pas seulement, pour tous les cas, les deux limites de la valeur de la puissance qui ferait équilibre au poids d'un corps placé sur un plan incliné; elle démontre aussi quelle serait la valeur de cette même puissance, s'il n'y avait pas de frottement.

En effet, soit D le point où la ligne $W B' B$, coupe la perpendiculaire $G H$, tirée du point G sur la longueur $O O'$; $W D$ représentera la valeur de la puissance qui maintiendrait le corps en équilibre, s'il n'y avait pas de frottement. Car l'élément de cette puissance qui est dans la direction du plan est $W H$; mais, puisque $O' G O$ est un triangle isocèle, le point H doit être au milieu de la ligne $O O'$; mais $A' O'$ est égal à $A O$; supprimons la longueur $A O'$ de ces deux longueurs, leurs restes $A A'$ et $O O'$ seront égaux; et, par conséquent, $W A$, qui

est la moitié d'un de ces restes, est égal à HO qui est la moitié de l'autre. Ajoutons à tous deux la longueur AH , et WH est égal à AO qui est lui-même égal à KI ou à la force avec laquelle le corps tend à descendre le long du plan.

Il en résulte donc que l'élément de WH , dans la direction du plan, serait égal à la force qui tend à faire descendre le corps, et que WG est par conséquent la puissance qui le tiendrait en équilibre.

(34) Il résulte de cette construction que, si la direction de la puissance est celle de la ligne WG qui passe par le point d'intersection des lignes $O'G$ et OG , les deux limites de la puissance seront les mêmes; les points B et B' coïncideront et il n'y aura qu'une seule puissance représentée par la ligne WG qui puisse tenir le corps en équilibre. Toute puissance plus grande ferait monter le corps sur le plan, et toute puissance moindre lui permettrait de descendre. C'est ce dont on peut facilement se rendre raison.

En effet, puisque $WA = HO$, et que WA représente le frottement résultant du poids du corps, HO est égal à ce frot-

tement; puisque l'angle HGO est le complément de l'angle HOG , il est égal à l'angle X , et, par conséquent, HO est à HG , comme le frottement est à la pression; mais HO représente la pression résultante du poids du corps, donc GH représente la pression. Enfin, puisque WG représente la puissance, HG est l'élément de cette puissance perpendiculaire au plan.

Il en résulte donc que la partie de la puissance, qui tend à diminuer la pression, est égale à cette pression tout entière; la pression étant détruite, il n'existe plus de frottement; par conséquent enfin, les deux limites de la puissance sont égales, leur différence, qui est toujours égale à deux fois les effets du frottement, s'étant évanouie.

Puisque GH est égal à FK et WH à IK ; puisque les angles en H et en K sont droits, il en résulte que WG est égal à FI , et que l'angle GWH est égal à l'angle FIK ; et qu'enfin, WG est parallèle à IK .

Il en résulte donc que, dans ce cas, la direction de la puissance est verticale, que cette puissance est égale au poids du corps, et qu'enfin, elle le supporte en-

entièrement et indépendamment du plan.

(35) [On peut obtenir très-facilement les résultats précédens au moyen de l'algèbre, et les formules qu'on trouve ainsi sont plus propres au calcul que les constructions géométriques que nous avons données.

Conservant la notation que nous avons employée aux numéros 26 et 30, l'effet du frottement résistant soit à l'ascension, soit à la descente du corps, est

$$(W \cos. e - P \sin. x) \text{ tang. } X.$$

On peut l'ajouter à l'élément $W \sin. e$ du poids du corps dans la direction du plan, afin d'obtenir la force à laquelle doit faire équilibre l'élément de P' dans la direction du plan, et qui doit en être soustraite pour obtenir l'élément de P'' dans la direction du plan. Par conséquent nous avons,

$$W \sin. e + (W \cos. e - P' \sin. x) \text{ tang. } X \\ = P'' \cos. x.$$

$$W \sin. e - (W \cos. e - P'' \sin. x) \tan. X = P'' \cos. x.$$

Multipliant les deux membres de chaque équation par $\cos. X$, et observant que $\tan. X \cos. X = \sin. X$, nous trouvons

$$W (\sin. e \cos. X + \sin. X \cos. e) - P' \sin. x \sin. X = P' \cos. x \cos. X.$$

$$W (\sin. e \cos. X - \sin. X \cos. e) + P'' \sin. x \sin. X = P'' \cos. x \cos. X.$$

$$\therefore W (\sin. e \cos. X + \sin. X \cos. e) = P' (\cos. x \cos. X + \sin. x \sin. X)$$

$$W (\sin. e \cos. X - \sin. X \cos. e) = P'' (\cos. x \cos. X - \sin. x \sin. X).$$

Mais, d'après les principes de la trigonométrie,

$$\sin. e \cos. X + \sin. X \cos. e = \sin. (e + X).$$

$$\cos. e \cos. X - \sin. e \sin. X = \cos. (e + X).$$

Par conséquent, nous obtenons

$$W \sin. (e + X) = P' \cos. (x - X)$$

$$W \sin. (e - x) = P'' \cos. (x + X)$$

$$\therefore P' = W \cdot \frac{\sin. (e + X)}{\cos. (x - X)}$$

$$P'' = W \frac{\sin. (e - X)}{\cos. (x + X)}$$

Formules adaptées aux calculs de ces problèmes.

Examinons maintenant à quelles conditions les deux limites P' et P'' de la puissance équilibrante deviennent égales.

Dans ce cas, nous devons avoir

$$\frac{\sin. (e + X)}{\cos. (x - X)} = \frac{\sin. (e - X)}{\cos. (x + X)}$$

$$\therefore \sin. (e + X) \cos. (x + X) = \sin. (e - X) \cos. (x - X)$$

$$\therefore \sin. (e + X) \cos. (x + X) = 2 \sin. (e - X) \cos. (x - X)$$

Mais, d'après les principes de la trigonométrie.

$$2 \sin. (e + X) \cos. (x + X) = \sin.$$

$$(e + x + 2 X) + \sin. (e - x).$$

$$2 \sin. (e - X) \cos. (x - X) = \sin.$$

$$(e + x - 2 X) + \sin. (e - x)$$

Omettant la quantité commune $\sin. (e - x)$ dans ces deux équations, nous avons

$$\sin. (e + x + 2 X) = \sin (e + x - 2 X).$$

Par conséquent les angles entre parenthèse, doivent être égaux ou supplémentaires :

1°. Supposons les égaux

$$e + x + 2 X = e + x - 2 X$$

$$\therefore X = 0.$$

C'est le cas dans lequel il n'y a pas de frottement, et où il n'y a, par conséquent qu'une seule valeur de P.

2°. Supposons ces angles supplémentaires .

$$e + x + 2 X = 180^\circ - e - x + 2 X.$$

$$\therefore 2 e + 2 x = 180^\circ;$$

$$\text{ou } e + x = 90^\circ$$

$$\therefore x = 90^\circ - e.$$

Par conséquent l'angle x que la direction de la puissance fait avec le plan, est égal au complément de l'élévation e . C'est le même résultat que celui que nous avons obtenu par la construction géométrique, au numéro 34.]

Il est facile de voir que la construction géométrique de la *fig.* 12, qui donne les valeurs de P' et P'' doit être dérivée de ces formules qui représentent ces quantités et que nous venons de trouver, et *vice versa*, c'est-à-dire que les formules peuvent être aussi dérivées de la construction géométrique.

Dans la *fig.* 12, $W G$ est égal à $F I$, ou à W , qui représenterait alors le poids du corps. L'angle $W G H$ est égal à $K F I$ ou à e , et l'angle $H G O$ ou $H G O'$ est égal à X . Par conséquent $W G B'$ est égal à $W G H - H G O'$, ou à $(e - X)$; et $W G B$ est égal à $W G H + H G O$, ou à $(e + X)$.

De même $G W B$ est égal à $G W H - B W H$, ou à $G W H - x$.

Mais,

$$G W H = 90^\circ = W G H = 90^\circ - e$$

Par conséquent,

$$G W B = 90^\circ - (e + x)$$

$$G B' B = G W B' + W G B'$$

$$G B' B = 90^\circ - (e + x) + e - X$$

$$G B' B = 90^\circ - (x + X)$$

De même,

$$G B W = G B' W - B' G B;$$

Mais,

$$B' G B = 2 X.$$

Par conséquent,

$$G B W = 90^\circ + (x + X) - 2 X,$$

$$\text{ou } G B W = 90^\circ + (x - X)$$

D'après les principes de la géométrie, nous avons

$$\begin{aligned} W B : W G &:: \sin. W G B \\ &: \sin. W B G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ou } P' : W &:: \sin. (e + X) \\ &: \cos. (x - X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W B' : G W &:: \sin. W G B' : \sin. W B' G \\ &= \sin. G B' B, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ou } P'' : W &:: \sin. (e - X) \\ &: \cos. (x - X). \end{aligned}$$

Par conséquent nous trouvons

$$P' = W. \frac{\sin. (e + X)}{\cos. (x - X)}$$

$$P'' = W. \frac{\sin. (e - X)}{\cos. (x + X)}$$

qui sont les formules que nous avons précédemment déterminées algébriquement; et en renversant cette méthode, on peut déduire, des formules, la construction géométrique.

Si la puissance est parallèle au plan, $x = 0$ et les formules deviennent

$$P' = W. \frac{\sin. (e + G)}{\cos. X}$$

$$P'' = W. \frac{\sin. (e - G)}{\cos. X}.$$

(36) Il est évident que tous les raisonnemens qui précèdent sont applicables, soit que le corps glisse ou roule, ou qu'il se meuve sur des roues ou des rouleaux.

Les seules variations qu'ils éprouveront, consisteront en ce que le rapport du frottement à la pression, ou la valeur

de f ou de $W A$ sera différent dans chaque application particulière.

CHAPITRE VII.

TABLEAUX DES RÉSULTATS DES EXPÉRIENCES SUR LE FROTTEMENT ET LA RAIDEUR DES CORDES.

(37) **PUISQU'AUCCUNE** théorie du frottement et de la raideur des cordes n'a encore été établie sur des principes parfaitement satisfaisans, et que toutes nos connaissances sur cette matière doivent dériver immédiatement de l'expérience, nous allons mettre sous les yeux de nos lecteurs quelques tableaux contenant les résultats des expériences faites par Coulomb; et, en comparant ces résultats avec les principes qui en ont été déduits, on sera à même de déterminer le degré

de confiance dont ces principes sont susceptibles.

PREMIER TABLEAU.

Frottement de bois sur bois , les directions des fibres étant dans le même sens , et la pression étant considérée comme l'unité.

Valeur de *f*.

Chêne contre chêne.....	0.43
Chêne contre sapin.....	0.65
Sapin contre sapin.....	0.56
Orme contre orme.....	0.47

Frottement de bois sur bois , les directions des fibres faisant entre elles un angle droit.

Valeur de *f*.

Chêne contre sapin.....	0.158
Sapin contre sapin.....	0.167
Orme contre orme.....	0.100

DEUXIÈME TABLEAU.

Frottement de rouleaux de bois de Gaïac de six pouces et de deux pouces de diamètre ; la pression étant considérée comme l'unité.

Charge sur les rouleaux, leur poids compris.	Frottemens Produits par un mouvement extrêmement lent, le diamètre des rouleaux étant	
	6 pouces.	2 pouces.
Livres.		
100	0.6	1.6
500	3.0	9.4
1000	6.0	18.0

Nous allons maintenant donner les résultats des expériences de Coulomb sur la raideur des cordes, placées sur différens rouleaux ayant de deux à douze pouces de diamètre. Une colonne de ce

tableau, donne la déduction du frottement, et une autre colonne comparative, indique les résultats obtenus avec l'appareil d'Amontons.

Les cordes employées par Coulomb, étaient de trois espèces.

La corde numéro 1 était composée de 6 fils de carret, ou de 3 lorons de 2 fils de carret chacun, avait une circonférence de 12 lignes $\frac{1}{2}$, et pesait 4 gros $\frac{1}{2}$, par pied de longueur;

La corde numéro 2 était composée de 15 fils de carret, avait une circonférence de 20 lignes, et pesait 12 gros $\frac{1}{2}$, par pied de longueur.

Enfin, le numéro 3 était composée de 30 fils de carret, avait 28 lignes de circonférence, et pesait 24 gros $\frac{1}{2}$, par pied de longueur.

NUMÉROS des expériences.	CORDES employées dans les expériences.	ESPÈCES de bois employés; diamètre et poids des rouleaux.
1	{ corde n° 3, composée de 30 fils de carret. }	{ Orme, 12 pouces de diamètre, pesant 110 livres. }
2	<i>Id.</i>	{ Orme, 6 pouces de diamètre, pesant 25 livres. }
3	<i>Id.</i>	{ Bois de Gaïac, 6 pouces de diamètre, pesant 50 livres. }
4	<i>Id.</i>	{ Bois de Gaïac, 2 6/8 pouces de diamètre, pesant 42 livres 1/2. }
5	{ corde n° 2, composée de 15 fils de carret. }	{ Bois de Gaïac, 6 pouces de diamètre, pesant 50 livres. }
6	{ corde n° 1, composée de 6 fils de carret. }	<i>Idem.</i>

Poids, exprimés en livres, suspendus de chaque côté du rouleau.	Poids additionnel, exprimé en livres, pour vaincre le frottement du rouleau et la rei- deur des cordes.	CHARGE TOTALE sur les supports du rouleau.	FROTTEMENT du rouleau.	RAIDEUR des cordes	
				Évaluée par l'appareil de Coulomb.	Évaluée par l'appareil d'Amontons.
100	5	315	1.5	3.5	4.4
300	11	721	3.6	7.4	10.4
500	20	1130	5.6	14.4	16.4
200	18	443			
200	16	466	2.8	13.2	14.8
25	11	65 172			
200	52	456 172			
25	1 174	101 174			
100	6	256			
200	11	461	2.8	8.2	7.6
500	24	1074	6.4	17.6	17.8
100	3	253	-		
200	6	456	2.7	3.3	3.1

On voit d'après ce tableau, que la méthode de Coulomb et celle d'Amontons produisent à peu près les mêmes résultats.

Coulomb attribue les plus grandes différences qu'on peut y remarquer, à la circonstance que quelques-unes des cordes employées par Amontons avaient servi, et que les résultats des expériences ont dû varier, puisque les cordes, dont on avait fait préalablement un usage quelconque étaient nécessairement plus flexibles que des cordes neuves.



3	<i>Idem.</i>	<i>Idem.</i>	3 0	400	21	Lent mais continuel. Les trois premiers pieds parcours en 5 s. 5/10 Les trois derniers en 2 secondes 5/10.	825	130	0.156
4	Corde très-flexible de 2 lignes de circon- férence.	Suif.	0.0	100	2.5	Lent mais continuel. Les trois premiers pieds parcours en 3 s. 5/10 Les trois derniers en 1 seconde 1/2.	216.5	17.5	0.808
5	Corde n° 1, composée de 6 fils de carret.	<i>Idem.</i>	1.5	200	6.5	Lent mais continuel. Les trois premiers pieds parcours en 3 s. 5/10 Les trois derniers en 1 seconde 5/10.	420	36	0.086

Suite du quatrième tableau. — Frottemens sur Pivots.

RAPPORT du frottement à la pression.		0.087
FROTTEMENT réduit à la surface de l'axe.		72
PRESSION sur l'axe de la poulie.		827
MOUVEMENT DES POIDS suspendus de chaque côté de la poulie.	Lent et continuél. Les trois premiers pieds parcourus en 5 s. 57¹⁰ Les trois derniers en 2 secondes. Les trois premiers pieds parcourus en 3 sec. Les trois derniers en 2 secondes.	
POIDS ADDITIONNEL pour faire mouvoir la poulie.	13 18 24	
POIDS SUSPENDUS de chaque côté de la poulie.	403	
POIDS EMPLOYÉ pour courber la corde sur la poulie. (en livres).	3.0	
NOM DES MATIÈRES onctueuses employées à graisser les surfaces.	Suif.	
CORDES employées dans les expériences.	Corde n° 1, 6 composée de 6 fils de carret.	
NUMÉROS des expériences.		

7	Corde de 2 lignes de circon- férence.	Oing.	0.0	50	2.5	Lent et continuel.	117	17.5	0.15
8	Idem.	Idem.	0.0	100	3.7	Idem.	218	26	0.119
9	Idem.	Idem.	0.0	150	5.7	Lent et incertain.	320	40	0.125
10	Corde n° 1, composée de 6 fils de caret.	Idem.	0.7	100	4.3	Les trois premiers pieds parcours en 3 se- condes.	218	26	0.119
					9	Les trois derniers en 1 seconde 17.			
					8.5	Incertain.			
					14	Les trois premiers pieds parcours en 4 sec.			
						Les trois derniers en 2 secondes.	422	50	0.119
11	Idem.	Idem.	1.5	200	20	Six pieds parcourus en 3 secondes 5710.			

Suite du quatrième tableau. — Frottemens sur Pivots.

NUMÉROS des expériences.	CORDES employées dans les expériences.	NOM DES MATIÈRES onctueuses employées à graisser les surfaces.	POIDS EMPLOYÉ pour courber la corde sur la poulie. (en livres).	POIDS SUSPENDUS de chaque côté de la poulie.	POIDS ADDITIONNEL pour faire mouvoir la poulie.	MOUVEMENT DES POIDS suspendus de chaque côté de la poulie.	PRESSION sur l'axe de la poulie.	FROTTEMENT réduit à la surface de l'axe.	RAPPORT du frottement à la pression.
12	Corde n° 1, composée de 6 fils de caret.	Oing.	3:0	400	17	Incertain. Les trois premiers pieds parcours en 6 s. 5/10 Les trois derniers en 2 secondes 5/10. Les trois premiers pieds parcours en 4 secon. Les trois derniers en 1 seconde 5/10.	831	101	0.121
					22				
					28				

13	L'ong des précédentes expériences étant essayé mais les po- res d u mé- tal restant onctueux .		de 200 à 1200 livres.	0.127
14	La surface nouvelle— menthuilée.			0.127 0.133
15	La subs- tance onctu- euse n'ayant pas été re- nouvellée depuis long- tems , bien que l'appar- eil eût été souvent em- ployé.			0.133

Le tableau précédent contient les résultats d'expériences sur le frottement de pivots de fer dans des boîtes de cuivre; les pivots employés avaient 19 lignes de diamètre, et entraient dans les boîtes de cuivre, d'une ligne $\frac{3}{4}$; la poulie avait 144 lignes ou un pied de diamètre, et pesait 14 livres.

Le but principal de ces expériences fut de déterminer le frottement du pivot *en mouvement*. C'est pourquoi Coulomb faisait parcourir aux poids un espace de six pieds, et mesurait, séparément, par demi-secondes, le tems employé à parcourir les trois premiers et les trois derniers pieds.

Les poids employés pour courber la corde, et qui sont indiqués dans la quatrième colonne du tableau, ont été calculés d'après les tensions exprimées dans la cinquième, au moyen des formules que nous avons données, et des résultats de quelques expériences préparatoires.

En soustrayant ces poids de ceux de la sixième colonne qui mettent l'appareil en mouvement, on obtient les poids employés à vaincre le frottement.

Ces derniers poids, agissant à une cer-

taine distance du centre de rotation égale à la somme des rayons de la poulie et de la corde, le frottement exercé sur les pivots, et qui, dans le cas d'un mouvement très-lent, peut être considéré comme faisant équilibre avec ces poids, est donc égal au produit de ces poids par le rapport de la somme des rayons de la poulie et de la corde au rayon du pivot ; ce rapport était presque celui de 7 à 1, lorsque les poids étaient suspendus par une ficelle très-fine, et presque celui de 7.2, à 1, lorsqu'ils étaient suspendus par la corde numéro 1. C'est d'après ces données, que fut calculée la neuvième colonne.

Les poids compris dans la huitième colonne sont composés : 1° du poids de la poulie ou du cylindre ; 2° du double du poids correspondant de la cinquième colonne ; 3° des poids contenus dans la sixième colonne ; car la somme de tous ces poids, forme nécessairement la pression sur les pivots. Par conséquent, pour trouver le rapport du frottement à la pression que renferme la dixième colonne, il a suffi de diviser un nombre de la neuvième, par le nombre correspondant de la huitième. Coulomb a éga-

lement cherché à déterminer le frottement d'axes de rotations faits avec différentes espèces de bois, et qu'on rencontre fréquemment dans les machines. Pour rendre ce frottement plus sensible, il employa les poulies de 12 pouces, montées sur des pivots de trois; quelquefois il rendait ces pivots immobiles, dans d'autres cas, ils pouvaient se mouvoir; mais le frottement restait le même. Les précautions les plus convenables furent prises pour adoucir les surfaces en contact et éviter l'incertitude et l'irrégularité qui, sans cela, eussent infailliblement affecté les résultats.

CINQUIÈME TABLEAU.

Espèces de bois employées dans les expériences.

Rapport du frottement
à la pression.

Pivots d'yeuse, boîtes de bois de
Gayac, graissées avec du suif. 0,038
Idem, *Idem*, le suif étant es-

suyé, mais les surfaces restant graissées	0.06
<i>Idem</i> , <i>Idem</i> , mais employés après avoir servi plusieurs fois, sans renouveler le suif..	0.06 0.08
Pivots d'yeuse, boîtes d'orme, graissées avec du suif.....	0.03
<i>Idem</i> , <i>Idem</i> , le suif étant es- suyé, mais les surfaces restant graissées.	0.05
Pivots de buis, boîtes de bois de Gayac, graissées avec du suif.	0.043
<i>Idem</i> , <i>Idem</i> , le suif étant es- suyé, mais les surfaces restant graissées.....	0.07
Pivots de buis, boîtes d'orme, graissées avec du suif.....	0.035
<i>Idem</i> , <i>Idem</i> , le suif étant es- suyé, mais les surfaces restant graissées.....	0.05
Pivots de fer, boîtes de bois de Gayac, faiblement graissées, puis essuyées, et ayant tourné les uns dans les autres pendant quelque tems.....	0.05

La vitesse du mouvement ne paraît pas exercer son influence d'une manière sensible sur le frottement, excepté dans les premiers instans du mouvement, et dans tous les cas, le frottement est moindre, lorsque les surfaces sont simplement graissées, que lorsque la matière onctueuse est abondante.

Dans les expériences que nous avons décrites sur la raideur des cordes, les mouvemens imprimés à l'appareil étaient presque insensibles. Coulomb voulut ensuite rechercher si, avec une vitesse déterminée, la raideur des cordes serait augmentée ou diminuée.

Dans ce but, il se servait d'une poulie en cuivre, ayant un axe en fer, tournant dans des boîtes de cuivre.

Le diamètre de la poulie était de 144 lignes; celui de l'axe de 20 lignes $\frac{1}{2}$, et la corde était du numéro 3, composé de 30 fils de caret; sa raideur, par rapport à une vitesse insensible, avait été déterminée par quelques-unes des expériences précédentes.

Le tableau suivant donne les résultats obtenus. Coulomb fit parcourir aux poids suspendus de chaque côté de la

poulie, un espace de 6 pieds; le tems employé pour parcourir les trois premiers et les trois derniers fut mesuré au moyen d'un pendule à demi-secondes.

SIXIÈME TABLEAU.

RAIDEUR DE LA CORDE estimée d'après sa tension et les expé- riences préliminaires.		livres.	4.0
RAIDEUR DE LA CORDE déduite des poids qui faisaient mouvoir la poulie.		livres.	4.9
POIDS AGISSANT à l'extrémité de la poulie et faisant équilibre au frottement.		livres.	2.6
PRESSION sur l'axe.		livres.	221
VITESSE DU MOUVEMENT des poids suspendus de chaque côté de la poulie.			Lent et continu. Les trois premiers pieds par- cours en 3 secondes; Les trois derniers en 1 se- conde 172. Les trois premiers pieds par- cours en 2 secondes, Les trois derniers en 1 se- conde 172.
PARTIE DU POIDS employée à vaincre le frottement et la raideur de la corde.		livres.	7.5
POIDS ADDITIONNEL pour faire mouvoir la poulie.		livres.	7.5
POIDS SUSPENDUS de chaque côté de la poulie.		livres.	100
NUMÉROS des expériences.			1

2	3	4	11	11	Lent et incertain. Les trois premiers pieds par- cours en 6 secondes.	4.9	6.1	6.6
200	400	600	15	12.9	Les trois derniers en 3 se- condes.	4.9	6.1	6.6
			19	12.2	Les trois premiers pieds par- cours en 3 secondes 172.	4.9	6.1	6.6
			20.5	20.5	Les trois derniers en 1 se- conde 172.	4.9	6.1	6.6
			24	19.9	Lent et incertain. Les trois premiers pieds par- cours en 6 secondes.	4.9	6.1	6.6
3	4	5	31	17.6	Les trois derniers en 3 se- condes.	9.7	10.8	11.8
			31	17.6	Les trois premiers pieds par- cours en 3 secondes.	9.7	10.8	11.8
			31.5	31.5	Les trois derniers en 2 se- condes.	9.7	10.8	11.8
			31.5	31.5	Douteux et continuel. Les trois premiers pieds par- cours en 6 secondes.	9.7	10.8	11.8
4	5	6	37	31.5	Les trois derniers en 3 se- condes 172.	14.5	17.0	17.0
			37	31.5	Les trois premiers pieds par- cours en 6 secondes.	14.5	17.0	17.0
			37	31.5	Les trois derniers en 3 se- condes.	14.5	17.0	17.0
			37	31.5	Les trois premiers pieds par- cours en 6 secondes.	14.5	17.0	17.0

Il résulte du troisième tableau que, pour courber la corde numéro 3, composée de 30 brins autour d'une poulie ou d'un rouleau de 12 pouces de diamètre, et avec une tension de 500 livres, il a fallu un poids de $14 \frac{4}{10}$ dont une livre $\frac{4}{10}$ était constamment nécessitée par le procédé employé dans la fabrication de la corde. Cette valeur peut être retenue ; mais il a paru plus convenable ici de réduire la partie de ce poids résultant de la tension de la corde, par quintal à $\frac{1}{5}$ ($14.4 - 1.4 = \frac{1}{5} \times 13 = 2.6$ livres. C'est d'après ces données que la dernière colonne du sixième tableau a été calculée.

CHAPITRE VIII.

OUVRAGES A CONSULTER SUR CETTE BRANCHE DE LA SCIENCE.

(38) Les principaux ouvrages qui traitent du frottement et de la raideur des